微分方程II习题课讲义

本科15级　理科试验1班　吴天

2019年3月29日

前 言

微分方程II，在中国科大是一门基础数学方向的专业必修课，也是推免至中国科大数学科学学院要求修读并通过的课程之一. 它的主要内容包括：Sobolev空间，线性椭圆方程，抛物方程等理论. 这些理论中，尤其是Sobolev空间的理论，都是比较近现代的数学理论，也是推动现代分析学发展的重要工具. 这门课程要求相对熟练地掌握实分析以及部分泛函分析(Riesz表示定理、紧算子的谱理论)的知识，因此，本门课程也会大量地应用各种硬分析、不等式估计的技巧，希望同学们能够在学习的过程中，不仅学会PDE研究的方法，还能更加深入地领会实分析的方法与技巧，以及泛函分析的理论在现代PDE中的应用.

本讲义将习题课的主要内容罗列出来，可以说一个提纲，也会将以前学过的有用的知识列出来，便于同学们查阅. 为避免大家查阅困难，我尽量将公式安排的紧凑，因此看似页数虽少，但内容颇多. 不仅如此，证明大多比较简略，一来启发大家思考，二来缩短篇幅. 水平有限，如有谬误，还望批评指正.

2019春-微分方程II助教 吴天
2019年2月28日 于中国科学技术大学

目 录

第1讲　预备知识

秋名山上行人稀，常有车手较高低. 旧时车道今犹在，不见当年老司机.

——某位车技高超的助教

在本门课程开始的前几次习题课，我们需要复习一些以前学习过的知识.

§1.1　微分形式与外微分

事实上，外微分的定义是通过光滑流形上的张量场给出的，具体内容超出了本门课程，感兴趣的同学可以查阅微分流形有关的书籍. 因此，这里我们以一种通俗易懂的方式，换句话说，是一种约定俗成的规则来给出，虽然这样不大符合数学体系的严谨性，但是便于大家理解.

考虑在$\mathbb{R}^n$上，对于微分$\mathrm{d}x_i$ $(i=1,\cdots,n)$之间定义外积运算"$\wedge$"，并规定$\mathrm{d}x_i\wedge\mathrm{d}x_j=-\mathrm{d}x_j\wedge\mathrm{d}x_i$，以及结合律. 由反交换律容易推出，对任意$i$，$\mathrm{d}x_i\wedge\mathrm{d}x_i=0$.

定义1.1.1 对于任意$E\subset\mathbb{R}^n$，定义

$$U^k(E)=\{\sum_{i_1,\cdots,i_k}f_{i_1,\cdots,i_k}\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}:i_1<\cdots<i_k,\ f_{i_1,\cdots,i_k}\in C^\infty(E)\}$$

其中的元素称为E上的k-微分形式，简称k-形式. 易知，$U^k(E)$是一个$\binom{n}{k}$维的线性空间. 任意一个k-形式与一个l-形式可以通过函数部分相乘、微分形式部分平凡相接的方式定义外积.

定义1.1.2 设$1\leqslant k\leqslant n-1$，$\omega=\sum\limits_{i_1,\cdots,i_k}f_{i_1,\cdots,i_k}\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}\in U^k(E)$，定义

$$\mathrm{d}\omega=\sum_{i_1,\cdots,i_k}\mathrm{d}f_{i_1,\cdots,i_k}\wedge\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}=\sum_{i_1,\cdots,i_k}\sum_{j=1}^n\frac{\partial f_{i_1,\cdots,i_k}}{\partial x_j}\mathrm{d}x_j\wedge\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}\in U^{k+1}(E)$$

为ω的外微分. 容易验证：$\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega)=0$，$U^0(E)=C^\infty(E)$，$U^k(E)=\{0\}$ $(\forall k>n)$.

例1.1 $(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+\mathrm{d}z)\wedge(x\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y-z\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z)=(x-z)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$.

例1.2 设$\omega = xy^2\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z - xz^2\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y \in U^2(\mathbb{R}^3)$，则$\mathrm{d}\omega = (y^2-2xz)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z \in U^3(\mathbb{R}^3)$.

设Φ为$\mathbb{R}^n$中的一个k维曲面，具有C^1参数表示：$\Phi:\begin{cases} x_1 = x_1(u_1,\cdots,u_k) \\ \dots \\ x_n = x_n(u_1,\cdots,u_k)\end{cases}$，其中$(u_1,\cdots,u_k)\in E\subset\mathbb{R}^k$，我们可以定义$k$-形式$\omega = \sum\limits_{i_1,\cdots,i_k} f_{i_1,\cdots,i_k}\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}\in U^k(E)$在$\Phi$上的积分：

$$\int_\Phi \omega = \int_E \sum_{i_1,\cdots,i_k} f_{i_1,\cdots,i_k}(\Phi(u_1,\cdots,u_k))\frac{\partial(x_{i_1},\cdots,x_{i_k})}{\partial(u_1,\cdots,u_k)}\mathrm{d}u_1\cdots\mathrm{d}u_k.$$

定义了积分以后，我们可以把Stokes、Gauss公式拓展到高维，并写为统一形式：

$$\int_{\partial U}\omega = \int_U \mathrm{d}\omega$$

这也被誉为是最美的公式之一. 最后我们看一个物理学中的例子.

例1.3 电磁学中著名的Maxwell方程：

$$\begin{cases} \nabla\cdot\vec{B} = 0, & \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} + \nabla\times\vec{E} = 0, \\ \nabla\cdot\vec{E} = 4\pi\rho, & \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} - \nabla\times\vec{B} = -4\pi\vec{J}. \end{cases}$$

定义Faraday 2-形式：$\mathbf{F} = E_x\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}t + E_y\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}t + E_z\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}t + B_x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + B_y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + B_z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$.

定义电流1-形式：$\mathbf{J} = \rho\mathrm{d}t + J_x\mathrm{d}x + J_y\mathrm{d}y + J_z\mathrm{d}z$.

定义Minkowski度量下的Hodge星算子$*: U^k(\mathbb{R}^4)\to U^{4-k}(\mathbb{R}^4)$，满足：

(1)对于2-形式，有：$** = -1$，$*(\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}t) = \mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z, *(\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}t) = \mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x, *(\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}t) = \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$.

(2)对于1-形式，有：$\mathrm{d}t\wedge(*\mathrm{d}t) = \mathrm{d}x\wedge(*\mathrm{d}x) = \cdots = \mathrm{d}t\wedge\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$.

根据以上条件，Maxwell方程等价于：$\mathrm{d}\mathbf{F} = 0,\ \mathrm{d}*\mathbf{F} = 4\pi*\mathbf{J}$. 证明留作练习.

§1.2 常用记号声明

在本门课中，有许多约定俗成的记号，在此说明.

凡是提到U, V等集合的时候，默认它们为$\mathbb{R}^n$中的开集.

记$V\Subset U$表示$\overline{V}\subset U$，且$\overline{V}$是紧的，此时，我们称V是U的紧子集.

定义$C^k(\overline{U}) = \{u\in C^k(U): \mathrm{D}^\alpha u$在$V$上一致连续, $\forall|\alpha|\leqslant k,\ V$是$U$的任意有界子集$\}$.

自然地，我们可以定义$C^\infty(\overline{U}) = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} C^k(\overline{U})$.

我们用$\mathrm{D}u$表示u的梯度，而不是∇u，因为D^2表示Hesse阵，而$\nabla^2 = \Delta$，我们需要的是前者.

定义积分平均记号：$\fint_U f(x)\mathrm{d}x := \dfrac{1}{m(U)}\int_U f(x)\mathrm{d}x.$

通常对于$1 \leqslant p \leqslant +\infty$，记它的对偶为$p'$，满足$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1.$

§1.3 常用不等式

本节我们介绍若干在微分方程中需要用到的不等式.

我们称函数f凸的，如果$\forall x,y\in\mathbb{R}^n$，$0\leqslant\tau\leqslant 1$，有$f(\tau x+(1-\tau)y)\leqslant \tau f(x)+(1-\tau)f(y)$. 如果$f$是凸的，则$\forall x\in\mathbb{R}^n$，$\exists r\in\mathbb{R}^n$，使得$f(y)\geqslant f(x)+r\cdot(y-x)$ $(\forall y\in\mathbb{R}^n)$. 特别地，如果$f$在$x$处可微，则$r$可以取为$\mathrm{D}f(x)$. 如果$f$是$C^2$的，则$f$是凸函数当且仅当$\mathrm{D}^2 f\geqslant 0$，其中$\mathrm{D}^2$表示Hesse阵.

定理1.3.1 (Jensen不等式)设f是$\mathbb{R}^m$上的凸函数，U是$\mathbb{R}^n$中的开集，$u:U\to\mathbb{R}^m$可积，则

$$f\left(\fint_U u\mathrm{d}x\right)\leqslant \fint_U f(u)\mathrm{d}x.$$

【证明】由f的凸性，$\forall p\in\mathbb{R}^m$，$\exists r\in\mathbb{R}^m$，使得$f(q)\geqslant f(p)+r\cdot(q-p)$ $(\forall q\in\mathbb{R}^m)$.

设$p=\fint_U \mathbf{u}dy$，$q=\mathbf{u}(x)$，$f(\mathbf{u}(x))\geqslant f\left(\fint_U \mathbf{u}\mathrm{d}y\right)+r\cdot\left(\mathbf{u}(x)-\fint_U \mathbf{u}\mathrm{d}y\right)$. 两侧对$x$积分即可. □

高中的时候我们学习过均值不等式：$|ab|\leqslant \dfrac{1}{2}a^2+\dfrac{1}{2}b^2$，而在PDE当中，我们经常需要使用系数带$\varepsilon$的形式：$|ab|\leqslant \varepsilon a^2+\dfrac{1}{4\varepsilon}b^2$ $(\forall\varepsilon>0)$. 类似地，我们研究Young不等式.

定理1.3.2 (Young不等式)设$1<p<\infty$，$a,b>0$，则$ab\leqslant \dfrac{a^p}{p}+\dfrac{b^{p'}}{p'}.$

【证明】对$f(x)=\mathrm{e}^x$在$\log a^p$和$\log b^{p'}$之间通过以$\dfrac{1}{p}$和$\dfrac{1}{p'}$为系数的凸组合的Jensen不等式得到. □

【注】带ε的Young不等式：$ab\leqslant \varepsilon a^p+\dfrac{(\varepsilon p)^{-q/p}}{q}b^q.$

定理1.3.3 (Hölder不等式)设$1\leqslant p\leqslant\infty$，$u\in L^p(U)$，$v\in L^{p'}(U)$，则$\|uv\|_{L^1(U)}\leqslant \|u\|_{L^p(U)}\|v\|_{L^{p'}(U)}$.

【证明】不妨设$\|u\|_{L^p}=\|v\|_{L^{p'}}=1$. 由Young不等式：

$$\|uv\|_{L^1(U)}=\int_U|uv|\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{p}\int_U|u|^p dx+\frac{1}{p'}\int_U|v|^{p'}dx=1=\|u\|_{L^p}\|v\|_{L^{p'}}.\quad\square$$

【注】事实上，上述证明过程只对$p>1$的情况给出，当$p=1,\infty$的时候需要另行讨论，不过此证明中是显然的，因此略去，不过对于L^p空间的证明一定需要注意分情况讨论.

在$0<p<1$，$p'<0$时，我们有反Hölder不等式：

定理1.3.4 (反Hölder不等式)设$0<p<1$，$u\in L^p(U)$，$v\in L^{p'}(U)$，则$\|uv\|_{L^1(U)}\geqslant \|u\|_{L^p(U)}\|v\|_{L^{p'}(U)}$.

【证明】不妨$uv\in L^1(U)$，否则显然成立. 置$\overline{p}=\dfrac{1}{p}$，则

$$\|u\|_{L^p(U)}=\left(\int_U\frac{|uv|^p}{|v|^p}\mathrm{d}x\right)^{\overline{p}}\leqslant\left(\int_U|uv|\mathrm{d}x\right)\left(\int_U\frac{1}{|v|^{\frac{p}{1-p}}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1-p}{p}}=\frac{\|uv\|_{L^1(U)}}{\|v\|_{L^{p'}(U)}}.\quad\square$$

定理1.3.5 (Minkowski不等式)设$1 \leqslant p \leqslant \infty$，$u, v \in L^p(U)$，则$\|u+v\|_{L^p(U)} \leqslant \|u\|_{L^p(U)} + \|v\|_{L^p(U)}$.

【**证明**】$\|u+v\|_{L^p(U)}^p = \int_U |u+v|^p \mathrm{d}x \leqslant \int_U |u+v|^{p-1}(|u|+|v|)\mathrm{d}x$

$$\leqslant \left(\int_U |u+v|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\left(\int_U |u|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p} + \left(\int_U |v|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p}\right) = \|u+v\|_{L^p(U)}^{p-1} \left(\|u\|_{L^p(U)} + \|v\|_{L^p(U)}\right). \quad \square$$

它同样有如下的反Minkowski不等式：

定理1.3.6 设$0 < p < 1$，$u, v \in L^p(U)$，则$\||u|+|v|\|_{L^p(U)} \geqslant \|u\|_{L^p(U)} + \|v\|_{L^p(U)}$.

【**证明**】类似定理1.3.5的证明，只不过利用的是反Hölder不等式. □

定理1.3.7 (一般的Hölder不等式)设$1 \leqslant p_1, \cdots, p_m \leqslant \infty$，$\sum_{k=1}^m \frac{1}{p_k} = 1$，且$u_k \in L^{p_k}(U)$ $(k = 1, \cdots, m)$，则$\int_U |u_1 \cdots u_m| \,\mathrm{d}x \leq \prod_{k=1}^m \|u_k\|_{L^{p_k}(U)}$.

【**证明**】利用普通的Hölder不等式结合归纳法得到. □

定理1.3.8 (插值不等式)设$1 \leqslant s \leqslant r \leqslant t \leqslant \infty$，则存在$\theta \in (0,1)$，使得$\frac{1}{r} = \frac{\theta}{s} + \frac{(1-\theta)}{t}$. 设$u \in L^s(U) \cap L^t(U)$，则$u \in L^r(U)$，且$\|u\|_{L^r(U)} \leqslant \|u\|_{L^s(U)}^{\theta} \|u\|_{L^t(U)}^{1-\theta}$.

【**证明**】$\int_U |u|^r \mathrm{d}x = \int_U |u|^{\theta r} |u|^{(1-\theta)r} \mathrm{d}x \leqslant \left(\int_U |u|^s \mathrm{d}x\right)^{\frac{\theta r}{s}} \left(\int_U |u|^t \mathrm{d}x\right)^{\frac{(1-\theta)r}{t}}$. □

定理1.3.9 (Gronwall不等式)设$\eta \in \mathrm{AC}[0,T]$是非负的，满足$\eta'(t) \leqslant \phi(t)\eta(t) + \psi(t)$，其中$\phi, \psi$均为$[0,T]$上的非负可积函数，则$\eta(t) \leqslant \exp\left\{\int_0^t \phi(s)\mathrm{d}s\right\}\left[\eta(0) + \int_0^t \psi(s)\mathrm{d}s\right]$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$. 特别地，如果$\forall t \in [0,T]$，有$\eta' \leqslant \phi\eta$，且$\eta(0) = 0$，则$\eta \equiv 0$.

【**证明**】$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\eta(s)\mathrm{e}^{-\int_0^s \phi(r)\mathrm{d}r}\right) = \mathrm{e}^{-\int_0^s \phi(r)\mathrm{d}r}\left(\eta'(s) - \phi(s)\eta(s)\right) \leqslant \mathrm{e}^{-\int_0^s \phi(r)\mathrm{d}r}\psi(s)$ a.e. $0 \leqslant s \leqslant T$.

$$\therefore \forall t \in [0,T],\ \eta(t)\exp\left\{-\int_0^t \phi(r)\mathrm{d}r\right\} \leqslant \eta(0) + \int_0^t \exp\left\{-\int_0^s \phi(r)\mathrm{d}r\right\}\psi(s)\mathrm{d}s \leqslant \eta(0) + \int_0^t \psi(s)\mathrm{d}s. \quad \square$$

Gronwall不等式还有一个对应于积分方程的形式，证明留作练习.

推论1.3.10 (Gronwall不等式的积分形式)设$\xi(t)$在$[0,T]$上非负可积，对几乎处处的t满足$\xi(t) \leqslant C_1 \int_0^t \xi(s)\mathrm{d}s + C_2$，其中$C_1, C_2 \geqslant 0$，则$\xi(t) \leqslant C_2\left(1 + C_1 t e^{C_1 t}\right)$ a.e. $0 \leqslant t \leqslant T$. 特别地，如果$\xi(t) \leqslant C_1 \int_0^t \xi(s)\mathrm{d}s$ a.e. $0 \leqslant t \leqslant T$，则$\xi(t)$几乎处处为0.

第2讲 测度理论与Lebesgue积分

本讲内容，主要是介绍抽象外测度理论，以及大家在实分析中学过的有关Lebesgue积分、微分定理，本讲涉及到的集合均为Euclid空间下的集合，2.2及其之后的测度均为Lebesgue测度.

§2.1 测度理论

本节提到的测度，均为外测度，特此说明.

定义2.1.1 设X非空，如果定义在幂集$2^X=\{A:A\subset X\}$上的非负广义函数μ满足$\mu(\varnothing)=0$，且对任意$\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$，有$\mu(A)\leqslant\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mu(A_k)$ (次可数可加性)，我们称μ为X上的一个测度，(X,μ)为测度空间.

定义2.1.2 若集合A满足对任意$B\subset X$，有$\mu(B)=\mu(B\cap A)+\mu(B-A)$，则称$A$为$\mu$-可测集.

我们称$\mathcal{A}\subset 2^X$为X上的一个σ-代数，如果$X,\varnothing\in\mathcal{A}$，且$\mathcal{A}$对集合的可数交、可数并、取补集运算封闭. $\mathbb{R}^n$中由所有开集生成的σ-代数中的集合叫做Borel集，记作$\mathcal{B}$.

定义2.1.3 如果$\mathbb{R}^n$上的测度μ称为Borel正则测度，如果满足任意的Borel集μ-可测，且对于任意$A\subset\mathbb{R}^n$，存在Borel集$B\supseteq A$，使得$\mu(A)=\mu(B)$. 我们把任意一个紧集测度都有限的Borel正则测度叫做Radon测度.

定义2.1.4 设$f:X\to Y$满足对任意Y上的开集U，$f^{-1}(U)$是μ-可测的，称f是μ-可测映射.

我们就Borel正则测度和Radon测度，叙述几条实分析中出现过的结论. 它们的详细证明请参考[6]的1.1、1.2.

定理2.1.5 设μ是$\mathbb{R}^n$上的Radon测度，则

(1)$\forall A\subset\mathbb{R}^n$，$\mu(A)=\inf\{\mu(U):A\subset U,\ U\text{是开集}\}$；

(2)对任意$\mathbb{R}^n$上的μ-可测集A，$\mu(A)=\sup\{\mu(K):K\subset A,\ K\text{是紧集}\}$.

定理2.1.6 设$f,g:X\to\mathbb{R}_\infty$是$\mu$-可测的，则$f\pm g$，$fg$，$|f|$都是$\mu$-可测的. 如果$g\neq 0$，则$\dfrac{f}{g}$也是$\mu$-可测的. 设$f_k:X\to\mathbb{R}_\infty$是$\mu$-可测的$(k\in\mathbb{N}^*)$，则$\inf\limits_{k\geqslant 1}f_k$，$\sup\limits_{k\geqslant 1}f_k$，$\liminf\limits_{k\to\infty}f_k$，$\limsup\limits_{k\to\infty}f_k$都是$\mu$-可测的.

引理2.1.7 (Borel-Cantelli引理)设$\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$是一列μ-可测集，$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mu(E_k)<\infty$，则$\mu(\limsup\limits_{k\to\infty}E_k)=0$.

定理2.1.8 (Lusin定理)设μ是$\mathbb{R}^n$上的Borel正则测度，$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$是$\mu$-可测的. 设$A\subset\mathbb{R}^n$是$\mu$-可测的，$\mu(A)<\infty$. 固定$\varepsilon>0$，则存在紧集$K\subset A$，使得$\mu(A-K)<\varepsilon$，且$f\big|_K$是连续的.

定理2.1.9 (Egorov定理)设μ是$\mathbb{R}^n$上的一个测度，$f_k:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$是$\mu$-可测的($k\in\mathbb{N}^*$). 设$A$是$\mu$-可测的，$\mu(A)<\infty$，在$A$上有$f_k\to f$ μ-a.e.，则$\forall\varepsilon>0$，$\exists B\subset A$为μ-可测集，使得$\mu(A-B)<\varepsilon$，且在B上$\{f_k\}$一致收敛到f.

例2.1 对于$s\geqslant 0$，$\delta>0$，$A\subset\mathbb{R}^n$，定义如下非负广义函数：

$$\mathcal{H}^s_\delta(A):=\inf\Big\{\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma(\frac{s}{2}+1)}\Big(\frac{\text{diam }C_j}{2}\Big)^s:A\subset\bigcup_{j=1}^{\infty}C_j,\ \text{diam }C_j\leqslant\delta\Big\}.$$

定义$\mathcal{H}^s(A):=\lim\limits_{\delta\to 0}\mathcal{H}^s_\delta(A)=\sup\limits_{\delta>0}\mathcal{H}^s_\delta(A)$. 能够证明，这是一个Borel正则测度，但只有当$s\geqslant n$时，这是一个Radon测度(请思考为什么)，我们称它为s维Hausdorff测度. 它度量的是一个集合在某一特定维度中的大小，例如，在$\mathbb{R}^3$中，$\mathcal{H}^1$能够度量线的长度，$\mathcal{H}^2$能够度量面的面积. 容易发现，$\mathcal{H}^n=\mathcal{L}^n$ (n维Lebesgue测度). 在$\mathcal{L}^n$测度下，无法分辨出低维度集合的大小，而在取定恰当参数s的情况下，Hausdorff测度就能够分辨，因此Hausdorff测度是更精细的一种测度.

对任意$A\subset\mathbb{R}^n$，存在唯一s_0，使得对任意$s>s_0$，$\mathcal{H}^s(A)=0$；任意$s<s_0$，$\mathcal{H}^s(A)=\infty$(请思考为什么). 因此，我们定义$s(A)=\inf\{s:\mathcal{H}^s(A)=0\}$为$A$的Hausdorff维度. Hausdorff维度不一定是整数，例如Cantor三分集$\mathcal{C}$的Hausdorff维度$s(\mathcal{C})=\dfrac{\log 2}{\log 3}$(证明比较复杂，不过有相关论文可查).

§2.2 Lebesgue积分理论

称$f(x)$是个简单函数，如果存在有限个两两不交的可测集E_k，使得$f(x)=\sum\limits_{k=1}^{N}a_k\chi_{E_k}(x)$. 我们可以定义它的积分：$\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n}f(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{N}a_k m(E_k)$. 如果$f(x)$是一个非负可测函数，则我们可以定义

$$\int_{\mathbb{R}^n}f(x)\mathrm{d}x=\sup_{h(x)\leqslant f(x)}\Big\{\int_{\mathbb{R}^n}h(x)\mathrm{d}x:h(x)\text{在}\mathbb{R}^n\text{上非负简单函数}\Big\}.$$

当$\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n}f(x)\mathrm{d}x<+\infty$时，称$f(x)$是Lebesgue可积的.

对于一般的可测函数$f(x)$，定义$f_+(x)=\begin{cases}f(x) & ,\ f(x)>0\\ 0 & ,\ f(x)\leqslant 0\end{cases}$，$f_-(x)=\begin{cases}-f(x) & ,\ f(x)<0\\ 0 & ,\ f(x)\geqslant 0\end{cases}$. 因此，这种情况下，我们可以定义一般可测函数的Lebesgue积分：

$$\int_{\mathbb{R}^n}f(x)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^n}f_+(x)\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^n}f_-(x)\mathrm{d}x.$$

当$\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n}f(x)\mathrm{d}x<+\infty$，称$f(x)$是Lebesgue可积的，记作$f\in L(\mathbb{R}^n)$.

在Lebesgue积分理论中，最核心的部分就是三大收敛定理，我们对它们的内容只做回顾，详细

证明请参考[7]. 以下出现的集合E默认均为$\mathbb{R}^n$上的可测集.

定理2.2.1 (Levi单调收敛定理)设$\{f_n\}$是E上的非负可测单调递增(减)函数列，且$\forall x\in E$，$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_E f_n(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x$.

定理2.2.2 (Fatou引理)设$\{f_n\}$是E上的非负可测函数列，则$\displaystyle\int_E \liminf_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x\leqslant \liminf_{n\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x$.

定理2.2.3 (控制收敛定理)设$f_n\in L(E)$，$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)\ \text{ a.e. } x\in E$. 如果存在$F\in L(E)$，使得$|f_n(x)|\leqslant F(x)\ \text{ a.e. } x\in E\ (\forall n\in\mathbb{N}^*)$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_E f_n(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x$.

【注】实际上，定理2.2.3的几乎处处收敛改成依测度收敛，结论依旧成立.

此外，关于Lebesgue积分还有几个比较重要的定理.

定理2.2.4 (积分的绝对连续性)若$f\in L(E)$，则$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使得$\forall F\subset E$，$m(F)<\delta$，有

$$\Big|\int_F f(x)\mathrm{d}x\Big|\leqslant\int_F|f(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon.$$

【证明】不妨f非负. 由于非负可测函数可被简单函数从下方逼近，因此存在φ为简单函数，使

$$\int_E\big(f(x)-\varphi(x)\big)\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{2}.$$

设$\varphi(x)\leqslant M$，取$\delta=\dfrac{\varepsilon}{2M}$，则当$F\subset E$且$m(F)<\delta$时，

$$\int_F f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_E\big(f(x)-\varphi(x)\big)\mathrm{d}x+\int_F\varphi(x)\mathrm{d}x<\varepsilon.\quad\square$$

许多关于Lebesgue积分结论的证明，都是类似于上述方法，先考虑非负可测简单函数，再考虑逼近一般情况. 同学们可以尝试着证明下面的定理.

定理2.2.5 (平移定理)设$f\in L(\mathbb{R}^n)$，则$\forall y\in\mathbb{R}^n$，$f(x+y)\in L(\mathbb{R}^n)$，且$\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n}f(x+y)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^n}f(x)\mathrm{d}x$.

下面给出Lebesgue可积函数与连续函数的关系.

定理2.2.6 若$f\in L(E)$，则$\forall\varepsilon>0$，$\exists g(x)\in C_0(\mathbb{R}^n)$，使得$\displaystyle\int_E|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon$.

【注】它的证明是依靠非负可测简单函数逼近非负可积函数的同时又能被紧支连续函数逼近(Lusin定理)完成的. 下面的定理是它的推论.

定理2.2.7 (积分的平移连续性)设$f\in L(\mathbb{R}^n)$，则$\lim\limits_{h\to 0}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n}|f(x+h)-f(x)|\mathrm{d}x=0$.

【证明】$\forall\varepsilon>0$，取分解：$f(x)=f_1(x)+f_2(x)$，使得$f_1\in C_0(\mathbb{R}^n)$，$\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n}|f_2(x)|\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{4}$.

由于f_1紧支且一致连续，故$\exists\delta>0$，使得当$|h|<\delta$时，$\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n}|f_1(x+h)-f(x)|\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{2}$.

$$\therefore\int_{\mathbb{R}^n}|f(x+h)-f(x)|\mathrm{d}x\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\int_{\mathbb{R}^n}|f(x+h)|\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|\mathrm{d}x=\frac{\varepsilon}{2}+2\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon.\quad\square$$

下面给出两个在交换积分次序时常用的定理.

定理2.2.8 (Fubini定理)若$f\in L(\mathbb{R}^n)$，$(x,y)\in\mathbb{R}^n=\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q$，则

(1)对于几乎处处的$x\in\mathbb{R}^p$，$f(x,y)$是$\mathbb{R}^q$上的可积函数.

(2)积分$\int_{\mathbb{R}^q}f(x,y)\mathrm{d}y$是$\mathbb{R}^p$上的可积函数.

(3)$\int_{\mathbb{R}^n}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\mathbb{R}^p}\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}^q}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{\mathbb{R}^q}\mathrm{d}y\int_{\mathbb{R}^p}f(x,y)\mathrm{d}x.$

定理2.2.9 (Tonelli定理)若f是$\mathbb{R}^n=\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q$上的非负可测函数，则

(1)对于几乎处处的$x\in\mathbb{R}^p$，$f(x,y)$是$\mathbb{R}^q$上非负可测函数.

(2)积分$\int_{\mathbb{R}^q}f(x,y)\mathrm{d}y$是$\mathbb{R}^p$上的非负可测函数.

(3)$\int_{\mathbb{R}^n}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\mathbb{R}^p}\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}^q}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{\mathbb{R}^q}\mathrm{d}y\int_{\mathbb{R}^p}f(x,y)\mathrm{d}x.$

例2.2 我们定义$f\in L(E)$的分布函数：$f_*(\lambda)=m(\{x\in E:|f(x)|>\lambda\})$，$\lambda>0$. 求证：对任意$p\geqslant 1$，有$\int_E|f(x)|^p\mathrm{d}x=p\int_0^{+\infty}\lambda^{p-1}f_*(\lambda)\mathrm{d}\lambda$.

【证明】记$F(\lambda,x)=\chi_{|f(x)|>\lambda}(\lambda,x)$，即在$|f(x)|>\lambda$时，$F(\lambda,x)=1$，其余的时候为0.

$$\int_E|f(x)|^p\mathrm{d}x=\int_E\mathrm{d}x\int_0^{+\infty}p\lambda^{p-1}F(\lambda,x)\mathrm{d}\lambda=\int_0^{+\infty}p\lambda^{p-1}\mathrm{d}\lambda\int_E F(\lambda,x)\mathrm{d}x=p\int_0^{+\infty}\lambda^{p-1}f_*(\lambda)\mathrm{d}\lambda.\quad\square$$

§2.3 Lebesgue微分定理

在数学分析中，大家学习过微积分基本定理，而它表明了微分与积分运算的可逆关系. 而在上一节，我们定义了Lebesgue积分，因此我们也需要研究更一般的微分理论. 而下面的Lebesgue微分定理探讨的是先积分再微分的问题.

定理2.3.1 (Lebesgue微分定理)设$f\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$，则 $\lim\limits_{\substack{m(B)\to 0\\x\in B}}⨍_B f(y)\mathrm{d}y=f(x)$ a.e. x，其中B是球.

我们定义满足$\lim\limits_{\substack{m(B)\to 0\\ \overline{x}\in B}}⨍_B|f(y)-f(\overline{x})|\mathrm{d}y=0$.的点$\overline{x}$为$f$的Lebesgue点. 我们有如下更强的结论.

推论2.3.2 (Lebesgue点的稠密性)$f\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$，则$\mathbb{R}^n$中几乎处处都为$f$的Lebesgue点.

【证明】$\forall r\in\mathbb{Q}$，定义$E_r=\{x:\lim\limits_{\substack{m(B)\to 0\\x\in B}}⨍_B|f(y)-r|\mathrm{d}y\neq|f(x)-r|\}$，定义$E=\bigcup\limits_{r\in\mathbb{Q}}E_r$.

由定理2.3.1，每个E_r是零测集，$\mathbb{Q}$是可数集，因此E是零测集.

取$\overline{x}\notin E$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists r\in\mathbb{Q}$，使得$|f(\overline{x})-r|<\varepsilon$，因此

$$⨍_B|f(y)-f(\overline{x})|\mathrm{d}y\leqslant ⨍_B|f(y)-r|\mathrm{d}y+|f(\overline{x})-r|$$

令$m(B)\to 0$，有：$\limsup\limits_{\substack{m(B)\to 0\\x\in B}}⨍_B|f(y)-f(\overline{x})|\mathrm{d}y\leqslant 2\varepsilon$. $\square$

我们称f是$[a,b]$上的有界变差函数， 如果它的总变差$\sup\sum\limits_{k=1}^{N}|f(t_k)-f(t_{k-1})|<+\infty$，其中sup是对任意一种$[a,b]$的分割：$a=t_0<\cdots<t_N=b$来取，一般记作$f\in \mathrm{BV}[a,b]$. 我们容易知道：单调函数、导数有界的函数以项是有界变差函数. 不仅如此，我们还有如下定理.

定理2.3.3 (Jordan分解定理)$f\in \mathrm{BV}[a,b]$当且仅当$f=g-h$，其中g和h均为$[a,b]$上的递增函数.

事实上，有界变差函数一定是几乎处处可微的，但是并不能保证导数的可积性. 称f是$[a,b]$上的绝对连续函数，如果$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使得当$\sum\limits_{k=1}^{N}(b_k-a_k)<\delta$时，$\sum\limits_{k=1}^{N}|f(b_k)-f(a_k)|<\varepsilon$，其中要求$(a_k,b_k)$之间两两不交，一般记作$f\in \mathrm{AC}[a,b]$. 有了绝对连续函数的概念，我们可以研究先微分再积分的问题.

定理2.3.4 如果f是单调递增的连续函数，则f'几乎处处存在，且f'是非负可测函数，满足

$$\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x\leqslant f(b)-f(a).$$

定理2.3.5 $f\in \mathrm{AC}[a,b]$，则f'几乎处处存在且可积，且$\forall x\in[a,b]$，满足$f(x)-f(a)=\displaystyle\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t$.

第3讲　多变量微积分

§3.1　场论初步与多重指标

首先，我们复习一些多变量微积分的基础知识. 这一节，我们总是假定出现的函数具有充分好的光滑性，区域也充分满足需要的条件.

任取向量$\nu \in \mathbb{R}^n$，我们定义函数f在x处的方向导数$\dfrac{\partial f}{\partial \nu}(x) := \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(x+h\nu)-f(x)}{h}$. 它有一个非常实用的计算公式：$\dfrac{\partial f}{\partial \nu} = \nabla f \cdot \nu$，其中$\nabla f = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}\right)$为$f$的梯度. 除了梯度，我们还通常需要用到一个向量值函数的散度. 设$\boldsymbol{F}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$，则定义其散度为：

$$\mathrm{div}\boldsymbol{F} = \nabla \cdot \boldsymbol{F} = \lim_{m(U)\to 0} \frac{1}{H^{n-1}(\partial U)} \oint_{\partial U} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}.$$

设$\boldsymbol{F} = (F_1, \cdots, F_n)$，我们有一种更实用地计算散度的方法：$\nabla \cdot \boldsymbol{F} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_k}{\partial x_k}$.

设f，g是数量值函数，$\boldsymbol{F}$是向量值函数，则有如下公式：

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f，\nabla \cdot (f\boldsymbol{F}) = \nabla f \cdot \boldsymbol{F} + f\nabla \cdot \boldsymbol{F}.$$

下面引入多重指标的概念，它在之后PDE的学习中有着重要作用.

定义3.1.1 称α是一个多重指标，如果$\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$. 定义$|\alpha| = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_k$，$\alpha! = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \alpha_k!$. 设$x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$，定义$x^\alpha = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} x_k^{\alpha_k}$. 设$f$是$\mathbb{R}^n$具有足够光滑性的函数，定义

$$\mathrm{D}^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial^{\alpha_1} x_1 \cdots \partial^{\alpha_n} x_n}.$$

多重指标在表达一些结论的时候有着简化公式的作用，下面给出一个使用多重指标表达的多变量中的Taylor展开的例子.

定理3.1.2 设f在x_0附近是光滑的，则对在x_0的某个邻域内的x，有

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{|\alpha|=n}\frac{\mathrm{D}^{\alpha}f(x_0)}{\alpha!}(x-x_0)^{\alpha}.$$

§3.2 边界的光滑性与Gauss-Green定理

本节中，设U是有界开集，$k\in\mathbb{N}^*$.

定义3.2.1 我们称∂U是C^k的边界，如果$\forall x^0\in\partial U$，$\exists r>0$和一个C^k的函数$\gamma:\mathbb{R}^{n-1}\to\mathbb{R}$，使得

$$U\cap B\left(x^0,r\right)=\left\{x\in B\left(x^0,r\right):x_n>\gamma\left(x_1,\cdots,x_{n-1}\right)\right\}.$$

如果$\forall k\in\mathbb{N}^*$，都有∂U是C^k的，则称∂U是C^∞的. 如果γ是解析的，则称∂U是解析的.

上述定义，在理论上给出了对于一个有界开集的边界光滑性的刻画. 当∂U是C^1的时候，考察它的单位外法向场：$\nu=(\nu_1,\cdots,\nu_n)$，可以定义$u\in C^1(\overline{U})$的外法向导数：$\dfrac{\partial u}{\partial\nu}:=\nu\cdot\mathrm{D}u$.

有了上述准备工作，我们可以引入拉直边界的方法. 固定$x^0\in\partial U$，取恰当的r和γ，定义

$$\begin{cases}y_i=x_i=:\Phi^i(x),\ i=1,\cdots,n-1\\ y_n=x_n-\gamma\left(x_1,\ldots,x_{n-1}\right)=:\Phi^n(x)\end{cases}$$

从而我们有变换公式：$y=\Phi(x)$. 同理，我们反解方程得到反变换公式$x=\Psi(y)=\Phi^{-1}(y)$：

$$\begin{cases}x_i=y_i=:\Psi^i(y),\ i=1,\cdots,n-1\\ x_n=y_n+\gamma\left(y_1,\ldots,y_{n-1}\right)=:\Psi^n(y)\end{cases}$$

我们把映射$x\to\Phi(x)=y$称作“在x^0附近拉直U的映射”. 试证明$\det\mathrm{D}\Phi=\det\mathrm{D}\Psi=1$.

下面，在∂U是C^1的情况下，我们回顾并总结有关于Gauss-Green定理的结论.

定理3.2.2 (Gauss散度定理)设$\mathbf{u}\in C^1(\overline{U};\mathbb{R}^n)$，则$\displaystyle\int_U\operatorname{div}\mathbf{u}\mathrm{d}x=\int_{\partial U}\mathbf{u}\cdot\nu\mathrm{d}S$.

定理3.2.3 (Gauss-Green定理)设$u\in C^1(\overline{U})$，则$\displaystyle\int_U u_{x_i}\mathrm{d}x=\int_{\partial U}u\nu_i\mathrm{d}S\ (i=1,\cdots,n)$.

【注】事实上，这是Gauss散度定理用于$u\mathbf{e}_i$的直接推论.

如果直接将Gauss-Green定理应用于函数uv，我们得到：

定理3.2.4 (分部积分公式)设$u,v\in C^1(\overline{U})$，则

$$\int_U u_{x_i}v\mathrm{d}x=-\int_U uv_{x_i}\mathrm{d}x+\int_{\partial U}uv\nu_i\mathrm{d}S\ (i=1,\cdots,n).$$

请同学们尝试着使用上述结论证明：

定理3.2.5 (Green公式)设$u,v\in C^2(\overline{U})$，则

(1)$\displaystyle\int_U \Delta u\mathrm{d}x=\int_{\partial U}\frac{\partial u}{\partial\nu}\mathrm{d}S$；

(2)$\displaystyle\int_U \mathrm{D}v\cdot\mathrm{D}u\mathrm{d}x=-\int_U u\Delta v\mathrm{d}x+\int_{\partial U}u\frac{\partial v}{\partial\nu}\mathrm{d}S$；

(3)$\displaystyle\int_U (u\Delta v-v\Delta u)\,\mathrm{d}x=\int_{\partial U}\left(u\frac{\partial v}{\partial\nu}-v\frac{\partial u}{\partial\nu}\right)\mathrm{d}S.$

§3.3 极坐标换元法与余面积公式

在PDE的研究中，我们在计算积分的时候，经常要用到极坐标代换的技巧.

定理3.3.1 设$f\in C(\mathbb{R}^n)\cap L(\mathbb{R}^n)$，则$\forall x_0\in\mathbb{R}^n$，$\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n}f\mathrm{d}x=\int_0^\infty\left(\int_{\partial B(x_0,r)}f\mathrm{d}S\right)\mathrm{d}r.$

这可以理解为考虑在一个球上的积分，可以看作被切作一个个表面的面积分，然后再对半径积分. 而这个思想可以表述为一个不难证明的恒等式：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\int_{B(x_0,r)}f\mathrm{d}x\right)=\int_{\partial B(x_0,r)}f\mathrm{d}S.$$

下面，我们把它总结为一个更一般的结论.

定理3.3.2 (余面积公式)设$u:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$是Lipschitz连续函数，对于几乎处处的$r\in\mathbb{R}$，定义水平集$\{x\in\mathbb{R}^n|u(x)=r\}$是$\mathbb{R}^n$ 中的一个光滑的 $(n-1)$维超曲面. 设$f\in C(\mathbb{R}^n)\cap L(\mathbb{R}^n)$，则

$$\int_{\mathbb{R}^n}f|\mathrm{D}u|\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^\infty\left(\int_{\{u=r\}}f\mathrm{d}S\right)\mathrm{d}r.$$

【注】具体证明比较复杂，在[6]的3.4节有更详细的阐述.

§3.4 卷积与磨光算子

定义3.4.1 设f和g是$\mathbb{R}^n$上的可测函数，如果积分

$$\int_{\mathbb{R}^n}f(x-y)g(y)\mathrm{d}y$$

存在，则称此积分为f与g的卷积，记为$(f*g)(x)$.

首先，我们给出一个显然的不等式：

定理3.4.2 若$f,g\in L(\mathbb{R}^n)$，则$f*g\in L(\mathbb{R}^n)$存在，且$\|f*g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\leqslant\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$.

【证明】先使用三角不等式平凡地化为f,g非负的情况，然后使用Tonelli定理. 留作练习. □

定理3.4.3 设$f\in L(\mathbb{R}^n)$，$g(x)$在$\mathbb{R}^n$上有界可测，则$(f*g)(x)$在$\mathbb{R}$上一致连续.

【证明】不妨$|g|\leqslant M$. 则$|(f*g)(x+h)-(f*g)(x)|\leqslant\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n}|f(x+h-t)-f(x-t)||g(t)|\mathrm{d}t$

$$\leqslant M\int_{\mathbb{R}^n}|f(x+h-t)-f(x-t)|\mathrm{d}t\to 0\ (h\to 0).$$

其中使用了可积函数积分的绝对连续性. 由于上述估计对任意$x\in\mathbb{R}^n$成立，因此结论得证. □

定理3.4.4 设$f\in L^1_{loc}(U)$，$g\in C_0^\infty(U)$，则$f*g\in C^\infty(U)$，且$D^\alpha(f*g)=f*(D^\alpha g)$.

【证明】不妨使用定义先证明一阶导数的情况，然后使用归纳法(归纳法显然，留作练习).

设$\operatorname{spt}g\subset\overline{V}\subset U$. 由于$f\in L^1_{loc}(U)$，所以$f\in L^1(\overline{V})$.

不妨考察$\dfrac{\partial(f*g)}{\partial x_1}(x)$. 对$h>0$充分小，由Taylor展开，$\exists\theta\in(0,1)$，使得

$$\Big|\frac{g(x+he_1-y)-g(x-y)}{h}-\frac{\partial g}{\partial x_1}(x-y)\Big|=\Big|\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2}(x+y+\theta he_1)h\Big|\leqslant\frac{1}{2}\max_{\overline{V}}\Big|\frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2}\Big|h.$$

利用$g\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$：$\Big|\dfrac{1}{h}\displaystyle\int_U f(y)\big(g(x+he_1-y)-g(x-y)\big)\mathrm{d}y-\int_U f(y)\frac{\partial g}{\partial x_1}(x-y)\mathrm{d}y\Big|$

$$\leqslant\int_{\overline{V}}|f(y)|\cdot\frac{1}{2}\max_{\overline{V}}\Big|\frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2}\Big|h\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\max_{\overline{V}}\Big|\frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2}\Big|\cdot\|f\|_{L^1(\overline{V})}h\to 0\ (h\to 0^+).$$

$\therefore$由偏导数的定义：$\dfrac{\partial(f*g)}{\partial x_1}(x)=\displaystyle\int_U f(y)\frac{\partial g}{\partial x_1}(x-y)\mathrm{d}y=\Big(f*\frac{\partial g}{\partial x_1}\Big)(x).$ □

【注】虽然表面上被称作卷积，但是它并没有“乘法”所应具有的所有性质. 事实上，$L^1(\mathbb{R})$中不存在函数$u(x)$是卷积的单位元，即$u*f(x)=f(x)$ a.e. $x\in\mathbb{R}$，对任意的$f\in L^1(\mathbb{R})$成立. 否则，取$\delta>0$，使得$\displaystyle\int_{-2\delta}^{2\delta}|u(x)|\mathrm{d}x<1$. 考察$f(x)=\chi_{[-\delta,\delta]}(x)$，则

$$f(x)=(u*f)(x)=\int_{-\delta}^{\delta}u(x-y)\mathrm{d}y=\int_{x-\delta}^{x+\delta}u(t)\mathrm{d}t\ \ \text{a.e. } x\in\mathbb{R}.$$

因此必定有$x_0\in[-\delta,\delta]$，使得$1=f(x_0)=\displaystyle\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}|u(t)|\mathrm{d}t\leqslant\int_{-2\delta}^{2\delta}|u(t)|\mathrm{d}t<1$，矛盾！

有了卷积这个工具，我们就可以定义磨光函数与磨光算子，把一个函数磨光，是用光滑函数逼近一般可积函数的有效方法。取$C=\displaystyle\int_{B_1}\exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right)\mathrm{d}x$，定义函数

$$\eta(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{C}\exp\left(\dfrac{1}{|x|^2-1}\right) & ,\ |x|<1\\ 0 & ,\ |x|\geqslant 1\end{cases}$$

显然，$\eta\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$且$\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n}\eta(x)\mathrm{d}x=1$，通常称$\eta$为软化子. 对于$\varepsilon>0$，定义$\eta_\varepsilon(x)=\dfrac{1}{\varepsilon^n}\eta\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)$，

称η_ε为磨光核. 显然，$\int_{\mathbb{R}^n}\eta_\varepsilon(x)\mathrm{d}x=1$，$\operatorname{spt}\{\eta_\varepsilon\}=\overline{B}_\varepsilon$. 对于$u\in L^1_{\mathrm{loc}}(U)$，定义$u$的磨光函数$u^\varepsilon$：

$$u^\varepsilon(x)=J_\varepsilon u(x)=(\eta_\varepsilon*u)(x)=\int_U\eta_\varepsilon(x-y)u(y)\mathrm{d}y,\ \forall x\in U.$$

其中的J_ε称为磨光算子. 若记$U_\varepsilon=\{x\in U:\operatorname{dist}(x,\partial U)>\varepsilon\}$，那么

$$u^\varepsilon(x)=\int_{B_\varepsilon(x)}\eta_\varepsilon(x-y)u(y)\mathrm{d}y,\ \forall x\in U_\varepsilon.$$

定理3.4.5 (磨光性质)磨光函数u^ε具有下面的性质：

(1)$u^\varepsilon\in C^\infty(U_\varepsilon)$；

(2)$u^\varepsilon\to u$几乎处处于U；

(3)当$u\in C(U)$时，在U的任一紧子集上u^ε一致收敛到u；

(4)若$1\leqslant p<\infty$，$u\in L^p_{\mathrm{loc}}(U)$, 那么在 $L^p_{\mathrm{loc}}(U)$中 $u^\varepsilon\to u$；

(5)假设$u\in L^1(U)$并且$\operatorname{spt}u\subset U$，记$\delta=\operatorname{dist}(\operatorname{spt}u,\partial U)$，则当$\varepsilon<\dfrac{\delta}{4}$时，有$u^\varepsilon\in C_0^\infty(U)$；

(6)若$u\in L^p(\mathbb{R}^n_+)$, 那么$\forall\sigma>0$，在空间$L^p(\mathbb{R}^n_{2\sigma})$中$u^\varepsilon\to u$，其中$\mathbb{R}^n_\sigma=\{x\in\mathbb{R}^n:x_n\geqslant\sigma\}$.

【**证明**】(1)它是定理3.4.4的直接推论.

(2)由定理2.3.2(Lebesgue点的稠密性)立刻可得，证明留作练习.

(3)由于$u\in C(U)$，对任意$U_0\Subset U$，取$U_0\Subset V\Subset U$. 由于u在$\overline{V}$上一致连续，因此

$$\lim_{r\to0^+}⨍_{B_r(x)}|u(y)-u(x)|\mathrm{d}y=0$$

对$x\in\overline{U}_0$一致地成立. 类似于(2)的证明过程，能够得到在$\overline{U}_0$上u^ε一致收敛到u.

(4)假设$1\leqslant p<\infty$，$u\in L^p_{\mathrm{loc}}(U)$. 取$U_0\Subset V\Subset U$. 先证当$\varepsilon>0$充分小时，$\|u^\varepsilon\|_{L^p(U_0)}\leqslant\|u\|_{L^p(V)}$. 事实上，对于$x\in U_0$，

$$|u^\varepsilon(x)|=\left|\int_{B_c(x)}\eta_\varepsilon(x-y)u(y)\mathrm{d}y\right|\leqslant\left(\int_{B_\varepsilon(x)}\eta_\varepsilon(x-y)\mathrm{d}y\right)^{1-\frac{1}{p}}\left(\int_{B_\varepsilon(x)}\eta_\varepsilon(x-y)|u(y)|^p\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}}$$

因为$\int_{B_\varepsilon(x)}\eta_\varepsilon(x-y)\mathrm{d}y=1$，所以当$\varepsilon$适当小时，$\int_{U_0}|u^\varepsilon(x)|^p\,\mathrm{d}x$

$$\leqslant\int_{U_0}\left(\int_{B_\varepsilon(x)}\eta_\varepsilon(x-y)|u(y)|^p\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\leqslant\int_V|u(y)|^p\left(\int_{B_\varepsilon(y)}\eta_\varepsilon(x-y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y=\int_V|u(y)|^p\mathrm{d}y$$

因此$\|u^\varepsilon\|_{L^p(U_0)}\leqslant\|u\|_{L^p(V)}$. 固定$U_0\Subset V\Subset U$，$\delta>0$, 并取$v\in C(V)$使得$\|u-v\|_{L^p(V)}<\delta$.

$$\therefore \|u^\varepsilon - u\|_{L^p(U_0)} \leqslant \|u^\varepsilon - v^\varepsilon\|_{L^p(U_0)} + \|v^\varepsilon - v\|_{L^p(U_0)} + \|v-u\|_{L^p(U_0)}$$

$$\leqslant 2\|v-u\|_{L^p(V)} + \|v^\varepsilon - v\|_{L^p(U_0)} \leqslant 2\delta + \|v^\varepsilon - v\|_{L^p(U_0)}.$$

由于$v^\varepsilon \to v$在$\bar{V}$上一致成立，因此$\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \|u^\varepsilon - u\|_{L^p(U_0)} \leqslant 2\delta.$

(5)设$\varepsilon < \dfrac{\delta}{4}$，由(1)知$u^\varepsilon \in C^\infty(U_\varepsilon)$. 先证$u^\varepsilon \in C_0^\infty(U_\varepsilon)$. 事实上，按照定义我们有

$$u^\varepsilon(x) = \int_{|x-y|<\varepsilon} \eta_\varepsilon(x-y)u(y)\mathrm{d}y,\ \forall x \in U_\varepsilon.$$

设$x \in U_\varepsilon$，$\mathrm{dist}(x,\partial U) < \dfrac{\delta}{2}$. 对于满足$|x-y| < \varepsilon$的$y$, 由$\mathrm{dist}(y,\partial U) \leqslant |x-y| + \mathrm{dist}(x,\partial U) < \dfrac{3\delta}{4}$知，$y \notin \mathrm{spt}\, u$. 从而$u^\varepsilon(x) = 0$. 这说明$\mathrm{spt}\, u^\varepsilon \subset U_\varepsilon$. 再把$u^\varepsilon$零延拓到$U$, 则$u^\varepsilon \in C_0^\infty(U)$.

(6)$\forall \delta > 0$，因为$u \in L^p(\mathbb{R}^n_+)$，故存在$m \gg 1$，使得

$$\int_{A_m^{(1)}} |u|^p \mathrm{d}x < \delta,\ \int_{A_m^{(2)}} |u|^p \mathrm{d}x < \delta$$

其中, $A_m^{(1)} = \mathbb{R}^n_\sigma \cap \{|x| \geqslant m\}, A_m^{(2)} = \mathbb{R}^n_{2\sigma} \cap \{|x| \geqslant 2m\}$. 类似于(4)的证明可知, 当$\varepsilon > 0$适当小时，

$$\int_{A_m^{(2)}} |u^\varepsilon|^p\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{A_m^{(1)}} |u|^p \mathrm{d}x < \delta.$$

由(4)知，在$L^p(\mathbb{R}^n_{2\sigma} \backslash A_m^{(2)})$中$u^\varepsilon \to u$. 于是

$$\int_{\mathbb{R}^n_{2\sigma}} |u^\varepsilon - u|^p\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n_{2\sigma}\backslash A_m^{(2)}} |u^\varepsilon - u|^p\,\mathrm{d}x + \int_{A_m^{(2)}} |u^\varepsilon - u|^p\,\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \int_{\mathbb{R}^n_{2\sigma}\backslash A_m^{(2)}} |u^\varepsilon - u|^p\,\mathrm{d}x + 2^{p-1}\left(\int_{A_m^{(2)}} |u^\varepsilon|^p\,\mathrm{d}x + \int_{A_m^{(2)}} |u|^p \mathrm{d}x\right) \leqslant 2^p\delta + \int_{\mathbb{R}^n_{2\sigma}\backslash A_m^{(2)}} |u^\varepsilon - u|^p\,\mathrm{d}x.$$

由此得$\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \|u^\varepsilon - u\|_{L^p(\mathbb{R}^n_{2\sigma})} \leqslant 2\delta^{\frac{1}{p}}$. □

【注】1. 如果U是有界开集，把$L^p(U)$中得函数u零延拓到U的外部后仍记为u. 取一个紧包含U的开集U_1，那么$u \in L^p(U_1)$. 由(1)知，$u^\varepsilon \in C^\infty(U)$. 再由(4)知，在$L^p(U)$中$u^\varepsilon \to u$.

2. 从(4)的证明过程可以看出: 如果$u \in L^p(U)$并且$\mathrm{spt}\, u \Subset U$, 那么当$0 < \varepsilon \ll 1$时, 有$\|u^\varepsilon\|_{L^p(U)} \leqslant \|u\|_{L^p(U)}$.

定理3.4.6 设U是非空开集，紧集$K \subset U$, 则存在$\phi \in C_0^\infty(U)$, 使得在K上$\phi \equiv 1$.

【证明】取开集V使得$K \subset V$并且$\overline{V} \subset U$，$\varepsilon = \dfrac{1}{3}\min\{\mathrm{dist}(K,\partial V), \mathrm{dist}(V,\partial U)\}$. 容易验证特征函数

$\phi(x) = \chi_V^{\varepsilon}(x) = \int_{B_\varepsilon} \eta_\varepsilon(y)\chi_V(x-y)\mathrm{d}y$满足定理的要求. □

§3.5 单位分解定理

研究函数性质的一个重要方法是把问题局部化，即在一点的邻域内讨论. 然而局部化之后还需要将其整合为整体，这就需要单位分解定理. 本节给出三个不同版本.

定理3.5.1 假设U是$\mathbb{R}^n$中的紧集，$U_1, \cdots, U_m$是U的一个开覆盖，那么存在$\zeta_i(x) \in C_0^\infty(U_i)$使得

(1)$0 \leqslant \zeta_i(x) \leqslant 1,\ \forall x \in U_i,\ i = 1, 2, \cdots, m$；

(2)$\sum_{i=1}^{m} \zeta_i(x) = 1,\ \forall x \in U$.

称$\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_m$为$U$的从属于开覆盖$U_1, U_2, \cdots, U_m$的一个有限$C^\infty$-单位分解.

【证明】因为开集U_1覆盖闭集$U \backslash \bigcup_{i=2}^{m} U_i$，所以$\delta_1 = \mathrm{dist}(\partial U_1, U \backslash \bigcup_{i=2}^{m} U_i) > 0$. 把$U_1$缩小为

$$U_1^* = \left\{x \in U_1 : \mathrm{dist}(x, \partial U_1) > \frac{\delta_1}{2}\right\}$$

$U_1^*, U_2, \cdots, U_m$仍然构成U的开覆盖. 类似地，逐个缩小$U_2, \cdots, U_m$为$U_2^*, \cdots, U_m^*$，那么$U_1^*, U_2^*, \cdots, U_m^*$还构成$U$的开覆盖. 由定理3.4.6知，存在$\phi_i \in C_0^\infty(U_i)$，在$\overline{U_i^*}$上$\phi_i \equiv 1$. 记$\phi(x) = \sum_{i=1}^{m} \phi_i(x)$，那么取$\zeta_i(x) = \frac{\phi_i(x)}{\phi(x)},\ i = 1, 2, \cdots, m$即为所要的单位分解. □

定理3.5.2 设U是$\mathbb{R}^n$中的集合，$\mathcal{U}$是U的一个开覆盖，那么存在$C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$中的一个函数族Σ(至多是可数集)，具有下列性质：

(1)对于任意的$\zeta \in \Sigma$和$x \in \mathbb{R}^n$，有$0 \leqslant \zeta(x) \leqslant 1$；

(2)对每个$\zeta \in \Sigma$,都存在$U \in \mathcal{U}$使得$\mathrm{spt}\,\zeta \subset U$；

(3)$\sum_{\zeta \in \Sigma} \zeta(x) = 1,\ \forall x \in U$；

(4)对U的任意紧子集U'，函数族Σ中至多有有限个ζ在U'上不恒为零.

称函数族Σ为U的从属于开覆盖$\mathcal{U}$的一个C^∞-单位分解.

【证明】先考虑U是紧集的情况，利用有限覆盖定理知，存在$U_1, U_2, \cdots, U_k \in \mathcal{U}$使得$U \subset \bigcup_{i=1}^{k} U_i$，由定理3.5.1知结论成立. 再考虑$U$是开集的情况：对于正整数$k$，定义

$$A_k = \left\{x \in U : |x| \leqslant k, \mathrm{dist}(x, \partial U) \geqslant \frac{1}{k}\right\}, \quad U_k = A_k \backslash A_{k-1}^\circ$$

其中$A_0 = \emptyset$. 这里，开始的几个U_k可能是空集，但是不影响讨论. 显然，U_k是紧集且$U = \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k$.

定义开集族$\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_2 = \{V \cap A_3^\circ : V \in \mathcal{U}\}$，$\mathcal{V}_k = \{V \cap A_{k+1}^\circ \cap A_{k-2}^\circ : V \in \mathcal{U}\}$，$k \geqslant 3$. 那么$\mathcal{V}_k$是紧集$U_k$的开覆盖. 利用上一步的结论知，存在$U_k$的一个从属于开覆盖$\mathcal{V}_k$的有限$C^\infty$-单位分解$\Sigma_k$. 显

然，对于U的任意紧子集U'，只能存在有限多个k，使得U'与$\mathcal{V}_k$中的元素（集合）相交.

又注意到Σ_k是有限单位分解，所以在每一点$x\in U$，有$\sigma(x)>0$. 容易验证，函数族

$$\Sigma=\left\{\frac{\phi(x)}{\sigma(x)}:\phi\in\bigcup_{k=1}^{\infty}\Sigma_k\right\}$$

具有定理的4个性质. 注意到Σ_k是有限集，故Σ至多是可数集.

最后考虑U是任意集合的情况. 由于$U\subset B:=\bigcup_{U\in\mathcal{U}}$，而$B$是开集，所以对$B$做出的单位分解同样也是对$U$做出的单位分解. □

定理3.5.3 假设U是$\mathbb{R}^n$中的集合，$\{U_i\}_{i=1}^n$是U的一个开覆盖， 那么存在$\zeta_i\in C_0^\infty(U_i)$，使得

(1)$0\leqslant\zeta_i(x)\leqslant 1,\ \forall x\in U_i,\ i=1,2,\cdots$；

(2)$\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}\zeta_i(x)=1,\ \forall x\in U$；

(3)$\forall x_0\in U$，存在x_0的一个邻域$B_\varepsilon(x_0)$，使得$\{\zeta_i\}_{i=1}^\infty$中只有有限个ζ_i在$B_\varepsilon(x_0)$不恒为零.

称 $\{\zeta_i\}_{i=1}^\infty$是U的从属于开覆盖$\{U_i\}_{i=1}^\infty$的一个C^∞-单位分解.

【证明】取$\{\psi_k\}_{k=1}^\infty$是由定理3.5.2得到的U的一个从属于开覆盖$\{U_i\}_{i=1}^\infty$的一个C^∞-单位分解.

当$\psi_k\not\equiv 0$时，由$\operatorname{spt}\psi_k\subset U_{i_k}$确定了一个多值映射$f:k\to i_k$. 对于任意的$i$，定义

$$\zeta_i(x)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{f(k)=i}\psi_k(x) & ,\ \text{如果存在}k\text{使得}f(k)=i\\ 0 & ,\ \text{若不存在}k\text{使得}f(k)=i\end{cases}.$$

从定理3.5.2的证明可以看出，$\forall x\in U$，$\displaystyle\sum_{f(k)=i}\psi_k(x)$中只包含有限多项非零项，因此$\zeta_i(x)$有定义，容易验证$\{\zeta_i\}_{i=1}^\infty$满足所要的条件. □

第4讲　调和函数的性质

我们称如下方程为Poisson方程的Dirichlet边界问题(通常简记为D.P.问题)：

$$\begin{cases}\Delta u(x)=f(x) & ,\ x\in U\\ u(x)=g(x) & ,\ x\in\partial U\end{cases}$$

其中$\Delta=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\partial^2}{\partial x_k^2}$为Laplace算子. 这是最简单的一种线性椭圆方程，如果非齐次项$f(x)=0$，这个方程退化为Laplace方程，它的解函数被称为U上的调和函数.

§4.1　调和函数与平均值性质

本小节探讨一般的调和函数理论，记ω_n为n维单位球的表面积，即

$$\omega_n=\mathcal{H}^{n-1}\big(\partial B_1(0)\big)=\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\Big(\dfrac{n}{2}\Big)}\text{，其中}\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}t^{s-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\text{为Euler第二积分.}$$

依照定义3.1.1定义多重指标：$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\in\mathbb{Z}^n$，$|\alpha|=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i$，$\alpha!=\prod\limits_{i=1}^{n}\alpha_i!$.

设$x=(x_1,\cdots,x_n)$，定义$x^\alpha=\prod\limits_{i=1}^{n}x_i^{\alpha_i}$，$\mathrm{D}^\alpha=\dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1}x_1\cdots\partial^{\alpha_n}x_n}$.

定义4.1.1 称$u\in C(U)$满足平均值性质(mean value property，记作$u\in$M.V.P.(U))，如果满足：

$$u(x)=\frac{1}{\omega_n r^{n-1}}\int\limits_{\partial B_r(x)}u(y)\mathrm{d}S_y\ (\forall B_r(x)\subset U)\ \text{或}\ u(x)=\frac{n}{\omega_n r^n}\int\limits_{B_r(x)}u(y)\mathrm{d}y\ (\forall B_r(x)\subset U).$$

【注】定义4.1.1的两个条件的等价性的证明是平凡的，留作练习.

性质4.1.2 (最大模原理)设$u\in C(\overline{U})\cap$M.V.P.(U)，且u不是常数，则u的最大值和最小值均只能在∂U上取得. 进而有$\max\limits_{\overline{U}}|u|=\max\limits_{\partial U}|u|$.

【证明】仅对最大值情况做出证明. 置$\Sigma=\{x\in U:u(x)=\max\limits_{\overline{U}}u\}$. 显然$\Sigma$是闭集.

$\forall x\in\Sigma$，取$r>0$，使$B_r(x)\subset U$，记$M=\max\limits_{\overline{U}}u$，由平均值性质：

$$M=u(x_0)=\frac{n}{\omega_n r^n}\int_{B_r(x_0)}u(y)\mathrm{d}y\leqslant\frac{n}{\omega_n r^n}\int_{B_r(x_0)}M\mathrm{d}y=M$$

由u的连续性，$u(y)\equiv M$ ($\forall y\in B_r(x_0)$)，即$B_r(x_0)\subset\Sigma$，Σ是开集. 故$\Sigma=\varnothing$或$\Sigma=U$. $\square$

定理4.1.3 $u\in C(U)\cap\mathrm{M.V.P.}(U)$当且仅当$\Delta u(x)=0$ ($\forall x\in U$)，并且调和函数一定光滑.

【证明】(充分性) 取$B_r(x)\subset U$，$\rho\in(0,r)$. 记$B_\rho=B_\rho(x)$. 由Gauss散度定理：

$$0=\int_{B_\rho}\Delta u(y)\mathrm{d}y=\int_{\partial B_\rho}\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}}\mathrm{d}S=\rho^{n-1}\frac{\partial}{\partial\rho}\int_{|w|=1}u(x+\rho w)\mathrm{d}S_w.$$

约掉ρ^{n-1}，并对ρ从0到r积分，有：$\displaystyle\int_{|w|=1}u(x+rw)\mathrm{d}S_w=u(x)\omega_n$.

(必要性) 已知U上的连续函数u满足平均值性质. 取$\varphi\in C_0^\infty\big(B_1(0)\big)$满足$\displaystyle\int_{B_1(0)}\varphi(x)\mathrm{d}x=1$，且$\varphi(x)$为径向函数，设为$\varphi(x)=\psi(|x|)$，则$\displaystyle\omega_n\int_0^1 r^{n-1}\psi(r)\mathrm{d}r=1$. 置$\displaystyle\varphi_\varepsilon(x)=\frac{1}{\varepsilon^n}\varphi\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)$.

对$\forall x\in U$，$\varepsilon<\mathrm{dist}(x,\partial U)$，有：$\displaystyle(\varphi_\varepsilon*u)(x)=\int_U u(x+y)\varphi_\varepsilon(y)\mathrm{d}y=\int_{|y|<1}u(x+\varepsilon y)\varphi(y)\mathrm{d}y$

$$=\int_0^1 r^{n-1}\mathrm{d}r\int_{\partial B_1(0)}u(x+\varepsilon rw)\varphi(rw)\mathrm{d}S_w=\int_0^1\psi(r)r^{n-1}\mathrm{d}r\int_{|w|=1}u(x+\varepsilon rw)\mathrm{d}S_w\xlongequal{\mathrm{M.V.P}}u(x).$$

因此对$\forall\varepsilon>0$，$\forall x\in U_\varepsilon:=\{y\in U:\mathrm{dist}(y,\partial U)>\varepsilon\}$，$u(x)=(\varphi_\varepsilon*u)(x)\in C^\infty(U_\varepsilon)$.

$\therefore u\in C^\infty(U)$. 由充分性的证明知：对$\forall B_r(x)\subset U$有

$$\int_{B_r(x)}\Delta u(y)\mathrm{d}y=r^{n-1}\frac{\partial}{\partial r}\int_{|w|=1}u(x+rw)\mathrm{d}S_w=r^{n-1}\frac{\partial}{\partial r}\big(\omega_n u(x)\big)=0.$$

由$B_r(x)$的任意性即得：$\Delta u(x)=0$ ($\forall x\in U$). $\square$

【注】证明当中的φ总是可以取出的，例如：$\varphi(x)=\begin{cases}C\cdot\exp\left\{\dfrac{1}{4|x|^2-1}\right\}, & |x|<\dfrac12\\ 0, & |x|\geqslant\dfrac12\end{cases}$.

§4.2 调和函数的梯度估计

定理4.2.1 (梯度估计)设$u\in C\big(\overline{B}_R(0)\big)$是$B_R(0)$上的调和函数，则：

(1)$|\mathrm{D}u(x_0)|\leqslant\dfrac{n}{R}\max\limits_{\overline{B}_R(0)}|u|$，特别地，若$u\geqslant0$，则$|\mathrm{D}u(x_0)|\leqslant\dfrac{n}{R}u(x_0)$.

(2)对任意多重指标α，$|\mathrm{D}^\alpha u(x_0)|\leqslant\dfrac{n^{|\alpha|}\mathrm{e}^{|\alpha|-1}|\alpha|!}{R^{|\alpha|}}\max\limits_{\overline{B}_R(x_0)}|u|$.

【证明】(1)易知，$\forall i=1,\cdots,n$，$\mathrm{D}_{x_i}u$也是$B_R(x_0)$上的调和函数. 则

$$\mathrm{D}_{x_i}u(x_0)=\frac{n}{\omega_nR^n}\int_{\partial B_R(x_0)}u(y)\nu_i\mathrm{d}S_y\Rightarrow \mathrm{D}u(x_0)=\frac{n}{\omega_nR^n}\int_{\partial B_R(x_0)}u(y)\nu\mathrm{d}S_y$$

$$\therefore |\mathrm{D}u(x_0)|\leqslant\frac{n}{\omega_nR^n}\int_{\partial B_R(x_0)}|u||\nu|\mathrm{d}S_y\leqslant\frac{n}{\omega_nR^n}\cdot\omega_nR^{n-1}\max_{y\in\bar{B}_R(x_0)}|u(y)|=\frac{n}{R}\max_{y\in\bar{B}_R(x_0)}|u(y)|.$$

特别地，$u\geqslant 0$时：$|\mathrm{D}u(x_0)|\leqslant\dfrac{n}{\omega_nR^n}\displaystyle\int_{\partial B_R(x_0)}u(y)\mathrm{d}S_y=\dfrac{n}{R}u(x_0)$.

(2)当$|\alpha|=1$时，由(1)知结论成立. 下面考察$|\alpha|=k$时，如果结论成立，当$|\alpha|=k+1$时，取$0<r<R$，不妨只考察$\dfrac{\partial^{k+1}}{\partial x_1^{k+1}}u(x_0)$：

$$\left|\frac{\partial^{k+1}}{\partial x_1^{k+1}}u(x_0)\right|\leqslant\frac{n}{r}\max_{x\in\bar{B}_r(x_0)}\left|\frac{\partial^k}{\partial x_1^k}u(x)\right|\leqslant\frac{n}{r}\max_{x\in\bar{B}_r(x_0)}\left(\frac{n^k\mathrm{e}^{k-1}k!}{(R-r)^k}\max_{y\in\bar{B}_{R-r}(x)}|u(y)|\right)$$

$$\leqslant\frac{n^{k+1}\mathrm{e}^{k-1}k!}{r(R-r)^k}\max_{y\in\bar{B}_R(x_0)}|u(y)|\xlongequal{r=\frac{R}{k+1}}\frac{n^{k+1}\mathrm{e}^{k-1}(k+1)!}{R^{k+1}}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\max_{y\in\bar{B}_R(x_0)}|u(y)|$$

$$\leqslant\frac{n^{k+1}\mathrm{e}^{k}(k+1)!}{R^{k+1}}\max_{y\in\bar{B}_R(x_0)}|u(y)|.$$ 由归纳法知，结论得证. □

利用定理4.2.1(1)的特殊情况，我们可以轻易推导出Liouville定理.

定理4.2.2 (Liouville定理)$\mathbb{R}^n$上的有上界或下界的调和函数必为常数.

【证明】不妨设$u\geqslant 0$(请思考为什么). $\forall i=1,\cdots,n$，$\forall x_0\in\mathbb{R}^n$，$\forall R>0$，有

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_i}u(x_0)\right|\leqslant\frac{n}{R}\max_{y\in\bar{B}_R(x_0)}u(x_0).$$

令$R\to+\infty$：有$\dfrac{\partial}{\partial x_i}u(x_0)=0$ $(\forall x_0\in\mathbb{R}^n)$，进而$u$为常数. □

在多变量微积分中，我们称f在U上解析，如果$f\in C^\infty(U)$，且对$\forall x_0\in U$，$\exists r>0$，使得$|x-x_0|<r$时，$f(x)$具有的Taylor展开$\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{|\alpha|=k}\frac{\mathrm{D}^\alpha f(x_0)}{\alpha!}(x-x_0)^\alpha+R_m(x,x_0)$满足$\displaystyle\lim_{m\to\infty}R_m(x,x_0)=0$.

定理4.2.3 开区域上的调和函数一定在这个开区域上解析.

【证明】取$B_{2r}(x)\subset U$，取$h\in\mathbb{R}^n$满足$|h|<\dfrac{r}{2n^2\mathrm{e}}<r$. 取含Lagrange余项的Taylor展式：

$$u(x+h)=\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{|\alpha|=k}\frac{\mathrm{D}^\alpha f(x_0)}{\alpha!}(x-x_0)^\alpha+\frac{1}{m!}\Big[\Big(\sum_{k=1}^n h_k\frac{\partial}{\partial x_k}\Big)^m u\Big](x_1+\theta h_1,\cdots,x_n+\theta h_n)+R_m(h)$$

其中$\theta\in(0,1)$. 由定理4.2.1，余项$|R_m(h)|\leqslant\dfrac{1}{m!}|h|^m n^m\dfrac{n^m\mathrm{e}^{m-1}m!}{r^m}\max\limits_{y\in\bar{B}_r(x+\theta h)}|u(y)|$

$$\leqslant\frac{1}{m!}|h|^m n^m\frac{n^m\mathrm{e}^{m-1}m!}{r^m}\max_{y\in\bar{B}_{2r}(x)}|u(y)|=\frac{1}{\mathrm{e}}\left(\frac{|h|n^2\mathrm{e}}{r}\right)^m\max_{\overline{B}_{2r}}|u|<\frac{1}{2^m\mathrm{e}}\max_{\overline{B}_{2r}}|u|.$$

$\therefore\lim\limits_{m\to\infty}|R_m(h)|=0$，即$u$是$U$上的解析函数. □

§4.3 Laplace方程的基本解

我们称Γ是Laplace方程$\Delta u=0$的基本解：$\Gamma(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}\log|x| & ,\ n=2\\ \dfrac{1}{(2-n)w_n}|x|^{2-n} & ,\ n\geqslant 3\end{cases}$.

性质4.3.1 $\Delta\Gamma=0\ (\forall x\neq 0)$，且$\displaystyle\int_{\partial B_r(0)}\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu}\mathrm{d}S=1\ (\forall r>0)$.

【证明】 $\Delta\Gamma=0$显然，留作练习. 当$n\geqslant 3$时，$\displaystyle\int_{\partial B_r(0)}\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu}\mathrm{d}S=\int_{\partial B_r(0)}\mathrm{D}\Gamma\cdot\frac{x}{r}\mathrm{d}S_x$

$$\overset{x=rw}{=\!=\!=}\int_{\partial B_1(0)}r^{n-1}\mathrm{D}\Gamma(rw)w\mathrm{d}S_w=r^{n-1}\int_{\partial B_1(0)}\frac{\partial}{\partial r}\big(\Gamma(rw)\big)\mathrm{d}S_w$$

$$=r^{n-1}\int_{\partial B_1(0)}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r^{2-n}}{(2-n)w_n}\right)\mathrm{d}S_w=\int_{\partial B_1(0)}\frac{1}{w_n}\mathrm{d}S_w=1.$$

对于$n=2$，$\displaystyle\int_{\partial B_r(0)}\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu}\mathrm{d}S=r^{n-1}\int_{\partial B_1(0)}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\log|r|}{2\pi}\right)\mathrm{d}S_w=r\int_{\partial B_1(0)}\frac{\mathrm{d}S_w}{2\pi r}=1.$ □

以下讨论均以$n\geqslant 3$为例，$n=2$类似. 注意到$\nabla\cdot(v\mathrm{D}w)=\mathrm{D}v\cdot\mathrm{D}w+v\Delta w$. 由Green公式：

$$\int_U(v\Delta w+\mathrm{D}v\cdot\mathrm{D}w)\mathrm{d}x=\int_{\partial U}v\frac{\partial w}{\partial\nu}\mathrm{d}S_x$$

其中$w\in C^2(U)\cap C^1(\overline{U})$，$v\in C^1(U)\cap C(\overline{U})$. 如果$w,v\in C^2(U)\cap C^1(\overline{U})$，则通过对称相减：

$$\int_U(v\Delta w-w\Delta v)\mathrm{d}x=\int_{\partial U}\left(v\frac{\partial w}{\partial\nu}-w\frac{\partial v}{\partial\nu}\right)\mathrm{d}S_x.$$

定理4.3.2 (Green恒等式)$u\in C^2(U)\cap C^1(\overline{U})$，则$\forall x\in U$，有

$$u(x)=\int_U\Gamma(x-y)\Delta_y u(y)\mathrm{d}y-\int_{\partial U}\left(\Gamma(x-y)\frac{\partial u}{\partial\nu}(y)-u(y)\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu_y}(x-y)\right)\mathrm{d}S_y.$$

【证明】 $\forall r>0$, Γ在$U\backslash\big(B_r(0)\big)$上关于$y$是光滑的. 下面用$u$代替$u(y)$，$\Gamma$代替$\Gamma(x-y)$：

$$\int_{U\backslash B_r(x)}(\Gamma\Delta u-u\Delta\Gamma)\,\mathrm{d}y=\int_{\partial U}\left(\Gamma\frac{\partial u}{\partial\nu}-u\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu}\right)\mathrm{d}S_y-\int_{\partial B_r(x)}\left(\Gamma\frac{\partial u}{\partial\nu}-u\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu}\right)\mathrm{d}S_y$$

其中$\Delta_y\Gamma(x-y)=0\ (\forall y\in U\backslash B_r(x))$. 令$r\to 0^+$：

$$\int_U \Gamma\Delta u\mathrm{d}y=\int_{\partial U}\left(\Gamma\frac{\partial u}{\partial\nu}-u\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu}\right)\mathrm{d}S_y-\lim_{r\to 0+}\int_{\partial B_r(x)}\left(\Gamma\frac{\partial u}{\partial\nu}-u\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu}\right)\mathrm{d}S_y$$

其中$\left|\int_{\partial B_r(x)}\Gamma\frac{\partial u}{\partial\nu}\mathrm{d}S_y\right|=\frac{r^{2-n}}{(n-2)w_n}\left|\int_{\partial B_r(x)}\frac{\partial u}{\partial\nu}\mathrm{d}S_y\right|\leqslant\frac{r^{2-n}}{(n-2)w_n}\left|\int_{\partial B_r(x)}|\mathrm{D}u||\nu|\mathrm{d}S_y\right|$

$$\leq\frac{r^{2-n}}{(n-2)w_n}w_nr^{n-1}\max_{\partial B_r(x)}|\mathrm{D}u|=\frac{r}{n-2}\max_{\partial B_r(x)}|\mathrm{D}u|\to 0\ (r\to 0^+).$$

而$\int_{\partial B_r(x)}u\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu}\mathrm{d}S_y=\int_{\partial B_r(x)}u\mathrm{D}\Gamma(x-y)\frac{y-x}{r}\mathrm{d}S_y\xlongequal{w=\frac{y-x}{r}}\int_{\partial B_1(0)}r^{n-1}u(x+rw)\frac{\partial}{\partial r}\left(\Gamma(rw)\right)\mathrm{d}S_w$
$=\frac{1}{w_n}\int_{\partial B_1(0)}u(x+rw)\mathrm{d}S_w\to u(x)\ (r\to 0^+)$. 因此，结论得证. □

【注】我们令定理4.3.2中的$u\equiv 1$，则有$\int_{\partial U}\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu_y}(x-y)\mathrm{d}S_y=1\ (\forall x\in U)$. 我们还可以这样得到：

$$\int_{\partial U}\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu_y}(x-y)\mathrm{d}S_y=\int_{\partial\left(U\backslash B_r(x)\right)}\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu_y}(x-y)\mathrm{d}S_y+\int_{\partial B_r(x)}\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu_y}(x-y)\mathrm{d}S_y\ (\forall 0<r<\operatorname{dist}(x,U))$$

其中$\int_{\partial\left(U\backslash B_r(x)\right)}\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu_y}(x-y)\mathrm{d}S_y=\int_{U\backslash B_r(x)}\Delta\Gamma(x-y)\mathrm{d}y=0$. 因此

$$\int_{\partial U}\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu_y}(x-y)\mathrm{d}S_y=\int_{\partial B_r(x)}\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu_y}(x-y)\mathrm{d}y=1.$$

下面，我们考虑D.P.问题：$\begin{cases}\Delta u(x)=f(x) & ,\ x\in U\\ u(x)=g(x) & ,\ x\in\partial U\end{cases}$. 对于$x\in U$，考察$\phi(x,\cdot)\in C^2(U)$满足

$$\begin{cases}\Delta_y\phi(x,y)=0 & ,\ y\in U\\ \phi(x,y)=\Gamma(x-y) & ,\ y\in\partial U\end{cases}$$

对u和ϕ应用Green公式，有：$\int_U\left(\phi\Delta u-u\Delta\phi\right)\mathrm{d}y=\int_{\partial U}\left(\phi\frac{\partial u}{\partial\nu}-u\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right)\mathrm{d}S_y$

$$\Leftrightarrow\ 0=\int_U\phi\Delta u\mathrm{d}y-\int_{\partial U}\left(\phi\frac{\partial u}{\partial\nu}-u\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right)\mathrm{d}S_y$$

将Green恒等式与之相减，有：$u(x)=\int_U(\Gamma-\phi)\Delta u\mathrm{d}y-\int_{\partial U}\left((\Gamma-\phi)\frac{\partial u}{\partial\nu}-u\frac{\partial(\Gamma-\phi)}{\partial\nu}\right)\mathrm{d}S_y$

$$=\int_U(\Gamma(x-y)-\phi(x,y))f(y)\mathrm{d}y+\int_{\partial U}u(y)\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\Gamma(x-y)-\phi(x,y)\right)\mathrm{d}S_y.$$

定义4.3.3 定义Green函数$G(x,y)\ (y\in U)$，满足$G(x,y)=\Gamma(x-y)-\phi(x,y)$，从而

$$u(x)=\int_U G(x,y)f(y)\mathrm{d}y+\int_{\partial U}u(y)\frac{\partial G}{\partial\nu}(x,y)\mathrm{d}S_y.$$

性质4.3.4 (1)$\forall y\in U\backslash\{x\}$，$\Delta_y G(x,y)=0$. (2)$\forall y\in\partial U$，$G(x,y)=0$. (3)$G(x,y)=G(y,x)$.

【证明】(1)(2)是显然的，只证明(3). 取定$x\neq y$，$x,y\in U$. $\exists r>0$，使得$B_r(x)\cap B_r(y)=\varnothing$.

置$G_1(z)=G(x,z)$, $G_2(z)=G(y,z)$. 则

$$0=\int_{U\backslash(B_r(x)\cup B_r(y))}(G_1\Delta G_2-G_2\Delta G_1)\mathrm{d}z=\left(\int_{\partial U}-\int_{\partial B_r(x)}-\int_{\partial B_r(y)}\right)\left(G_1\frac{\partial G_2}{\partial\nu}-G_2\frac{\partial G_1}{\partial\nu}\right)\mathrm{d}S.$$

从x的角度考察：$\int_{\partial B_r(x)}\left(G_1\frac{\partial G_2}{\partial\nu}-G_2\frac{\partial G_1}{\partial\nu}\right)\mathrm{d}S=\int_{\partial B_r(x)}\left(\Gamma_1\frac{\partial G_2}{\partial\nu}-G_2\frac{\partial \Gamma_1}{\partial\nu}\right)\mathrm{d}S$

$$-\int_{\partial B_r(x)}\left(\phi_1\Delta G_2-G_2\Delta\phi_1\right)\mathrm{d}z=\int_{\partial B_r(x)}\left(\Gamma_1\frac{\partial G_2}{\partial\nu}-G_2\frac{\partial \Gamma_1}{\partial\nu}\right)\mathrm{d}S$$

同理：$\int_{\partial B_r(y)}\left(G_1\frac{\partial G_2}{\partial\nu}-G_2\frac{\partial G_1}{\partial\nu}\right)\mathrm{d}S=\int_{\partial B_r(y)}\left(G_1\frac{\partial \Gamma_2}{\partial\nu}-\Gamma_2\frac{\partial G_1}{\partial\nu}\right)\mathrm{d}S.$

令$r\to0^+$：$\lim_{r\to0+}\left(\int_{\partial B_r(x)}\left(\Gamma_1\frac{\partial G_2}{\partial\nu}-G_2\frac{\partial\Gamma_1}{\partial\nu}\right)\mathrm{d}S+\int_{\partial B_r(y)}\left(G_1\frac{\partial\Gamma_2}{\partial\nu}-\Gamma_2\frac{\partial G_1}{\partial\nu}\right)\mathrm{d}S\right)=0\ldots(\bigstar)$

这里利用了$G_1\Big|_{\partial U}=0$，$G_2\Big|_{\partial U}=0$. 又因为$y\notin\overline{B}_r(x)$，再利用散度公式：

$$\int_{\partial B_r(x)}\Gamma_1\frac{\partial G_2}{\partial\nu}\mathrm{d}S=\int_{\partial B_r(x)}\frac{|x-z|^{2-n}}{(2-n)\omega_n}\frac{\partial G_2(y,z)}{\partial\nu_z}\mathrm{d}S_z=\frac{r^{2-n}}{(2-n)\omega_n}\int_{\partial B_r(x)}\frac{G_2(y,x)}{\partial\nu_z}\mathrm{d}S_z=0.$$

同理$\int_{\partial B_r(x)}\Gamma_2\frac{\partial G_1}{\partial\nu}\mathrm{d}S=0$. 又由于

$$\lim_{r\to0}\int_{\partial B_r(x)}G_2\frac{\partial\Gamma_1}{\partial\nu}\mathrm{d}S=\lim_{r\to0}\int_{\partial B_r(x)}G_2(y,z)\frac{1}{\omega_n}|x-z|^{-n}(x-z)\cdot\nu_z\mathrm{d}S_z$$

$$=\lim_{r\to0}\frac{1}{r^n}\int_{\partial B_r(x)}G_2(y,z)\frac{|x-z|^2}{\omega_n}\frac{1}{r}\mathrm{d}S_z=\lim_{r\to0}\frac{1}{\omega r^{n-1}}\int_{\partial B_r(x)}G_2(y,z)\mathrm{d}S_z.$$

且$\Delta G_2\big|_{z\in B_r(x)}\equiv0\quad\therefore\lim_{r\to0}\int_{\partial B_r(x)}G_2\frac{\partial\Gamma_1}{\partial\nu}\mathrm{d}S=G(y,x).$

同理，$\lim\limits_{r\to 0}\int_{\partial B_r(y)} G_1\dfrac{\partial \Gamma_2}{\partial\nu}\mathrm{d}S = G(x,y)$. 把它们代入(★)式，有：$G(x,y)=G(y,x)\ (\forall x\neq y)$. □

定理4.3.5 $\forall x\neq y\ (x,y\in U)$，有：$\begin{cases}\Gamma(x-y)<G(x,y)<0 & ,\ n\geqslant 3\\ \Gamma(x-y)-\dfrac{1}{2\pi}\log\operatorname{diam}U<G(x,y)<0 & ,\ n=2\end{cases}$.

【证明】固定$x\in U$，记$G(y)=G(x,y)$.

由于$\lim\limits_{y\to x}=-\infty$，故而$\exists r>0$，使得$G\big|_{\partial B_r(x)}<0$.

由于$G\big|_U\equiv 0$，利用最大模原理：$G(y)<0(\forall y\in U)$.

1. 当$n\geq 3$时，$G(y)=\dfrac{|x-y|^{2-n}}{(2-n)\omega_n}-\phi(x,y)<-\phi(x,y)\ (\forall y\in\partial U)\Rightarrow\phi(x,y)<G(y)\equiv 0\ (\forall y\in\partial U)$.

   同样由最大模原理，$\phi(y)<0\ (\forall y\in U)$. 所以$G(y)=\Gamma(x-y)-\phi(x,y)>\Gamma(x,y)\ (n\geqslant 3)$.

2. 当$n=2$时，$G(y)=\dfrac{1}{2\pi}\log|x-y|-\phi(x,y)\leqslant\dfrac{1}{2\pi}\log\operatorname{diam}U-\phi(x,y)\ (\forall y\in\partial U)$.

   $\therefore$由最大模原理，$\phi(x,y)<\dfrac{1}{2\pi}\log\operatorname{diam}U\Rightarrow G(y)>\Gamma(x,y)-\dfrac{1}{2\pi}\log\operatorname{diam}U\ (\forall y\in U)$. □

定理4.3.6 考虑球$B_R(0)$上的Green函数：

$$G(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{|2-n|\omega_n}\left(|x-y|^{2-n}-\left|\dfrac{R}{|x|}x-\dfrac{|x|}{R}y\right|^{2-n}\right) & ,\ n\geqslant 3\\ \dfrac{1}{2\pi}\left(\log|x-y|-\log\left|\dfrac{R}{|x|}x-\dfrac{|x|}{R}y\right|\right) & ,\ n=2\end{cases}.$$

【证明】当$y\in\partial B_R(0)$时，考虑x关于$\partial B_R(0)$的反射$X=\dfrac{R^2}{|x|^2}x$. 则$R^2=|X||x|$且x,X,O三点共线.

注意到$\triangle Oxy\backsim\triangle OyX$，因此$\dfrac{|x|}{R}=\dfrac{R}{|X|}=\dfrac{|y-x|}{|y-X|}$，从而

$$|y-x|=\frac{|X|}{R}|y-X|=\left|\frac{|x|}{R}y-\frac{R}{|x|}x\right|\ (\forall y\in\partial B_R(0)).$$

$\therefore$为了满足$\begin{cases}\Delta_y\phi(x,y)=0 & ,\ y\in U\\ \phi(x,y)\equiv\Gamma(x-y) & ,\ y\in\partial U\end{cases}$，只需取$\phi(x,y)=\dfrac{1}{(2-n)\omega_n}\left|\dfrac{R}{|x|}x-\dfrac{|x|}{R}y\right|^{2-n}$.

$\therefore G(x,y)=\dfrac{1}{(2-n)\omega_n}\left(|x-y|^{2-n}-\left|\dfrac{R}{|x|}x-\dfrac{|x|}{R}y\right|^{2-n}\right)$. 对于$n=2$同理可证. □

下面考察$G(x,y)$在球面上的法向导数.

定理4.3.7 设G是$B_R(0)$上的Green函数，则$\dfrac{\partial G}{\partial\nu_y}(x,y)=\dfrac{R^2-|x|^2}{\omega_n R\,|x-y|^n}\ (\forall x\in B_R(0),\ y\in\partial B_R(0))$.

【证明】当$n\geqslant 3$时，由定理4.3.6知：

$$G(x,y)=\frac{1}{(2-n)\omega_n}\left(|x-y|^{2-n}-\left(\frac{R}{|x|}\right)^{n-2}|y-X|^{2-n}\right)\ (\forall x\in B_R(0),y\in\partial B_R(0)).$$

$$\therefore \mathrm{D}_{y_i}G(x,y)=\frac{1}{\omega_n}\left(\frac{-x_i+y_i}{|x-y|^n}-\left(\frac{R}{|x|}\right)^{n-2}\frac{y_i-X_i}{|X-y|^n}\right)=\frac{1}{\omega_n\,|x-y|^n}\left(y_i-x_i-\left(\frac{|x|}{R}\right)^2(X_i-y_i)\right)$$

$$=\frac{y_i}{\omega_n R^2}\frac{R^2-|x|^2}{|x-y|^n}\ \Rightarrow\ \frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\nu_{y_i}\mathrm{D}_{y_i}G(x,y)=\frac{1}{\omega_n R}\frac{R^2-|x|^2}{|x-y|^n}.$$

对于$n=2$时，$G(x,y)=\dfrac{1}{2\pi}\left(\log|x-y|-\log\left|\dfrac{R}{|x|}x-\dfrac{|x|}{R}y\right|\right)$，从而

$$\mathrm{D}_{y_i}G(x,y)=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{-x_i+y_i}{|x-y|^2}+\frac{\frac{R}{|x|}x_i-\frac{|x|}{R}y_i}{\left|\frac{R}{|x|}x-\frac{|x|}{R}y\right|^2}\frac{|x|}{R}\right)=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{-x_i+y_i}{|x-y|^2}+\frac{x_i-y_i}{|x-y|^2}\frac{|x|}{R}\right)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{|x-y|^2}\left(y_i-x_i+\left(\frac{|x|^2}{R}\right)(x_i-y_i)\right)=\frac{y_i}{2\pi\,|x-y|^2}\left(1-\frac{|x|^2}{R^2}\right)=\frac{y_i}{\omega_n R^2}\frac{R^2-|x|^2}{|x-y|^2}.$$

故$\dfrac{\partial G}{\partial \nu_y}(x,y)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\nu_{y_i}\mathrm{D}_{y_i}G(x,y)=\frac{1}{\omega_n R}\frac{R^2-|x|^2}{|x-y|^2}.$ □

定义4.3.8 记$K(x,y)=\dfrac{R^2-|x|^2}{\omega_n R|x-y|^n}$为Poisson核$(x\in B_R(0),y\in\partial B_R(0))$.

引理4.3.9 Poisson核具有如下性质：

(1)$K(x,y)$对$x\in B_R(0)$和$y\in\partial B_R(0)$光滑；

(2)$K(x,y)>0$，$\forall x\in B_R(0),\ y\in\partial B_R(0)$；

(3)对于固定的$y_0\in\partial B_R(0)$和$\delta>0$，$\displaystyle\lim_{\substack{x\to y_0\\|x|<R}}K(x,y)=0$对$y\in\partial B_R(0)\backslash B_\delta(0)$一致成立；

(4)$\Delta_x K(x,y)=0\ (\forall y\in\partial B_R(0))$；

(5)$\displaystyle\int_{\partial B_R(0)}K(x,y)dS_y=1(\forall x\in B_R(0))$.

【证明】 设$U=B_R(0)$. (1)(2)是显然的，下证(3)(4)(5).

(3)当$|x-y_0|<\dfrac{\delta}{2}$时，$(x\in U)$，$\dfrac{R^2-|x|^2}{\omega_n R|x-y|^n}\leqslant\dfrac{2^n}{\delta^n}\dfrac{2R}{\omega_n R}(R-|x|)$.

$$\therefore\ \sup_{y\in U\cap B_{\frac{\delta}{2}}(x_0)}K(x,y)\le\frac{2^{n+1}}{\omega_n\delta^n}(R-|x|)\ (\forall y\in\partial B_R(0)\backslash B_\delta(y_0)).$$

$$\therefore\ \lim_{\substack{x\to y_0\\x\in B_R(0)}}\sup_{y\in U\cap B_{\frac{\delta}{2}}(x_0)}K(x,y)\le\frac{2^{n+1}}{\omega_n\delta^n}(R-|y_0|)=0.$$

因此，$\displaystyle\lim_{\substack{x\to y_0\\x\in B_R(0)}}K(x,y)=0$ 对$y\in\partial B_R(0)\backslash B_\delta(y_0)$一致成立.

(4)由$K(x,y)=\dfrac{R^2-|x|^2}{\omega_n R|x-y|^n}$知：$\mathrm{D}_xK(x,y)=-\dfrac{2x}{\omega_n R|x-y|^n}+\dfrac{n\left(R^2-|x|^2\right)}{\omega_n R|x-y|^{n+2}}(x-y)$.

$$\therefore\Delta_x K(x,y)=-\frac{2n}{\omega_n R|x-y|^n}+\frac{2nx\cdot\frac{x-y}{|x-y|}}{\omega_n R|x-y|^{n+1}}-\frac{n^2\left(R^2-|x|^2\right)}{\omega_n R|x-y|^{n+2}}$$

$$+\left(\frac{n\cdot 2|x|\cdot\dfrac{x}{|x|}}{\omega_n R|x-y|^{n+2}}+\frac{(n+2)\,n\left(R^2-|x|^2\right)}{\omega_n R|x-y|^{n+3}}\cdot\frac{x-y}{|x-y|}\right)\cdot(x-y)$$

$$\begin{aligned}
=&-\frac{2n}{\omega_n R|x-y|^n}+\frac{2n|x|^2}{\omega_n R|x-y|^{n+2}}-\frac{2nxy}{\omega_n R|x-y|^{n+2}}+\frac{2n\left(R^2-|x|^2\right)}{\omega_n R|x-y|^{n+2}}\\
&+\frac{2n|x|^2}{\omega_n R|x-y|^{n+2}}-\frac{2nxy}{\omega_n R|x-y|^{n+2}}\\
=&\frac{2n|x|^2}{\omega_n R|x-y|^{n+2}}\left(-|x-y|^2+|x|^2-xy+R^2-|x|^2+|x|^2-xy\right)\\
=&\frac{2n|x|^2}{\omega_n R|x-y|^{n+2}}\left(-|y|^2+2xy-xy+R^2-|x|^2+|x|^2-xy\right)=0\ \ (\forall y\in\partial B_R(0))\,.
\end{aligned}$$

(5) $\displaystyle\int_{\partial B_R(0)}K(x,y)\mathrm{d}S_y=\int_{\partial B_R(0)}\frac{\partial G}{\partial\nu_y}\mathrm{d}S_y=\int_{\partial B_R(0)}\frac{\partial\Gamma(x-y)}{\partial\nu_y}\mathrm{d}S_y-\int_{\partial B_R(0)}\frac{\partial\phi(x,y)}{\partial\nu_y}\mathrm{d}S_y=1.$ □

定理4.3.10 对于$\varphi\in C(\partial B_R(0))$, 定义Possion公式:

$$u(x)=\begin{cases}\displaystyle\int_{\partial B_R}K(x,y)\varphi(y)\mathrm{d}S_y & ,\ x\in B_R(0)\\ \varphi(x) & ,\ x\in\partial B_R(0)\end{cases}$$

它满足$u\in C^\infty(B_R(0))\cap C(\bar B_R(0))$且 $\begin{cases}\Delta u=0 & ,\ x\in B_R(0)\\ u=\varphi & ,\ x\in\partial B_R(0)\end{cases}$.

【证明】由引理4.3.8知：u在$B_R(0)$上调和，故$u\in C^\infty(B_R(0))$.

下面只需证 $u\in C(\bar B_R(0))$，即对$\forall y_0\in\partial B_R(0)$, 有：$\displaystyle\lim_{\substack{x\to y_0\\|x|<R}}\int_{\partial B_R(0)}K(x,y)\varphi(y)\mathrm{d}S_y=\varphi(y_0)$.

由引理4.3.8(5),对固定$\delta>0$，$\displaystyle\int_{\partial B_R(0)}K(x,y)\varphi(y)\mathrm{d}S_y-\varphi(y_0)$

$$=\int_{\partial B_R(0)\cap B_\delta(y_0)}K(x,y)\left(\varphi(y)-\varphi(y_0)\right)\mathrm{d}S_y+\int_{\partial B_R(0)\setminus B_\delta(y_0)}K(x,y)\left(\varphi(y)-\varphi(y_0)\right)\mathrm{d}S_y:=I_1+I_2.$$

由于$\varphi\in C\left(\partial B_R(0)\right)$，所以$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta=\delta(\varepsilon)$，使得

$$|\varphi(y)-\varphi(y_0)|<\varepsilon\ \ (\forall y\in\partial B_R(0)\cap B_\delta(y_0))$$

$$\therefore|I_1|\le\varepsilon\int_{\partial B_R(0)\cap B_\delta(y_0)}K(x,y)\mathrm{d}S_y\le\varepsilon\to 0\ (\varepsilon\to 0);$$

$$|I_2|\le 2\cdot\max_{y\in\partial B_R(0)}|\varphi(y)|\cdot\int_{\partial B_R(0)}K(x,y)\mathrm{d}S_y\to 0\ \ (x\to y_0\text{且}x\in B_R(0))\,.$$ □

定理4.3.11 设u在$B_R(0)\backslash\{0\}$上调和，且$u(x)=\begin{cases} o(\log|x|) & ,\ n=2 \\ o(|x|^(2-n)) & ,\ n\geqslant 3 \end{cases}$ $(x\to 0)$，则u可将$x=0$处补充定义为$B_R(0)$上的调和函数.

【证明】不妨设$u\in C^1(\partial B_R)$. 由定理4.3.9，$\exists v$满足$\begin{cases} \Delta v=0 & ,\ x\in B_R(0) \\ v=u & ,\ x\in\partial B_R(0) \end{cases}$.

设$w(x)=v(x)-u(x)$，下面考察$n\geqslant 3$的证明，$n=2$同理.

考虑$0<r<R$，令$M_r=\max\limits_{\partial B_r}|w|$，则$|w(x)|\leqslant M_r\dfrac{r^{n-2}}{|x|^{n-2}}$.

定义$\begin{cases} f_1(x)=w(x)+M_r\frac{r^{n-2}}{|x|^{n-2}} \\ f_2(x)=w(x)-M_r\frac{r^{n-2}}{|x|^{n-2}} \end{cases}$. 它们均是$B_R\backslash B_r$上的调和函数，且在$\partial B_R\cup\partial B_r$上，$f_1\geqslant 0$，$f_2\leqslant 0$. 由最大模原理，知：在$B_R\backslash B_r$上，$f_1\geqslant 0$，$f_2\leqslant 0$. 故$|w(x)|\leqslant M_r\dfrac{r^{n-2}}{|x|^{n-2}}\ldots(\bigstar)$

而$M_r=\max\limits_{\partial B_r}|v-u|\leqslant\max\limits_{\partial B_r}|v|+\max\limits_{\partial B_r}|u|$. 对$v$用最大模原理,知：$M_r\leqslant\max\limits_{\partial B_R}|v|+\max\limits_{\partial B_r}|u|$.

由于$\forall x\neq 0$，$\exists r_x>0$，使得$x\in B_R\backslash B_r$ $(\forall 0<r<r_x)$. 利用$(\bigstar)$式：

$$|w(x)|\leqslant\frac{r^{n-2}}{|x|^{n-2}}(\max_{\partial B_R}|v|+\max_{\partial B_r}|u|)$$

由于$u(x)=o(|x|^{2-n})(x\to 0)$，在上式令$r\to 0$，有$r^{n-2}\max\limits_{\partial B_r}|u|\to 0$. 因此令$r\to 0$，$w(x)=0$. □

§4.4 Harnack不等式

定理4.4.1 (球上的Harnack不等式)设$u\leqslant 0$是B_R上的调和函数，那么$\forall x\in B_R$,有：

$$\left(\frac{R}{R+|x|}\right)^{n-2}\frac{R-|x|}{R+|x|}u(0)\leqslant u(x)\leqslant\left(\frac{R}{R-|x|}\right)^{n-2}\frac{R+|x|}{R-|x|}u(0).$$

【证明】假设$u\in C(\overline{B}_R)$，Possion公式：$u(x)=\displaystyle\int_{\partial B_R}\frac{R^2-|x|^2}{|x-y|^n}u(y)\mathrm{d}y$.

对$|y|=R$，我们有：$R-|x|\leqslant|x-y|\leqslant R+|x|$.

$$\therefore\frac{1}{\omega_n R}\left(\frac{R}{R+|x|}\right)^{n-2}\frac{R-|x|}{R+|x|}\int_{\partial B_R}u(y)\mathrm{d}S_y\leqslant u(x)\leqslant\frac{1}{\omega_n R}\left(\frac{R}{R-|x|}\right)^{n-2}\frac{R+|x|}{R-|x|}\int_{\partial B_R}u(y)\mathrm{d}S_y.$$

再由u的均值性，有：$\dfrac{1}{\omega_n R^{n-1}}\displaystyle\int_{\partial B_R}u(y)\mathrm{d}S_y=u(0)$.

$$\frac{1}{\omega_n R^{n-1}}\left(\frac{R}{R+|x|}\right)^{n-2}\frac{R-|x|}{R+|x|}\int_{\partial B_R}u(y)\mathrm{d}S_y\leqslant u(x)\Longrightarrow\left(\frac{R}{R+|x|}\right)^{n-2}\frac{R-|x|}{R+|x|}u(0)\leqslant u(x).$$

对于不等式右侧是同理的，因此结论得证. □

推论4.4.2 设$u \geqslant 0$是$U \subset \mathbb{R}^n$上的调和函数，$\overline{B_{2R}(y)} \subset U$，则$\alpha(\frac{1}{2})u(y) \leqslant u(x) \leqslant \beta(\frac{1}{2})u(y)$ $(\forall x \in B_R(y))$，其中 $\alpha(t) = \frac{1-t}{(1+t)^{n-1}}$单调递减，且$\beta(t) = \frac{1+t}{(1-t)^{n-1}}$单调递增.

【证明】由定理4.4.1知，$u(x) \geqslant \left(\frac{R}{R+|x|}\right)^{n-2} \frac{R-|x|}{R+|x|}u(0) = \alpha(\frac{|x|}{R})u(0)$.

同理，$u(x) \leqslant \beta(\frac{|x|}{R})u(0)$. 利用$u \geqslant 0$且在$B_{2R}(y)$上调和，将0换成$y$，$x$换成$x-y$，$R$换成$2R$：

$$\alpha\left(\frac{|x-y|}{2R}\right)u(y) \leqslant u(x) \leqslant \beta\left(\frac{|x-y|}{2R}\right)u(y).$$

若$x \in B_R(y)$，则$\frac{|x-y|}{2R} < \frac{1}{2}$，从而$\alpha\left(\frac{|x-y|}{2R}\right) \geqslant \alpha(\frac{1}{2})$，$\beta\left(\frac{|x-y|}{2R}\right) \leqslant \beta(\frac{1}{2})$.

$\therefore \alpha(\frac{1}{2})u(y) \leqslant u(x) \leqslant \beta(\frac{1}{2})u(y)$ $(\forall x \in B_R(y))$. □

定理4.4.3 设K是U上的紧子集，则$\exists C = C(U,K) > 0$，使得$\forall u \geqslant 0$且在U上调和，有

$$\frac{1}{C}u(y) \leqslant u(x) \leqslant Cu(y) \ (\forall x, y \in U).$$

【证明】选取$0 < R < \frac{1}{2}\operatorname{dist}(K, \partial U)$ (请思考为什么可以做到).

故存在有限个覆盖$B_R(x_i)$ $(i = 1, 2, \cdots, N)$，且能保证对任意的i，有$x_i \in K$，且$B_{2R}(x_i) \subset U$.

对$\forall x, y \in K$，取$x_{j_1}, \cdots, x_{j_s} \in \{x_1, \cdots, x_N\}$. 取$z_0, \cdots, z_s \in U$，使得

$$z_0 = x，z_s = y，z_{i-1}, z_i \in B_R(x_{j_i}) \ (i = 1, 2, \cdots, s).$$

应用推论4.4.2，我们有：

$$\alpha^s(\frac{1}{2})u(y) \leqslant \alpha^{s-1}(\frac{1}{2})u(z_{s-1}) \leqslant \cdots \leqslant \alpha(\frac{1}{2})u(x) \leqslant \beta(\frac{1}{2})u(z_1) \leqslant \cdots \leqslant \beta^s(\frac{1}{2})u(y).$$

进而选取$C = \max\left\{\beta^s(\frac{1}{2}), \alpha^{-s}(\frac{1}{2})\right\} = C(U,K,n)$，有$\frac{1}{C}u(y) \leqslant u(x) \leqslant Cu(y)$ $(\forall x, y \in K)$. □

定义4.4.4 设$u \in C^2(U)$,称它是下(上)调和函数，如果它满足$\Delta u \leqslant (\geqslant) 0$ $(\forall x \in U)$.

定理4.4.5 设$u \in C^2(B_1 \cap C(\overline{B_1})$是下调和函数在$B_1$上，即$\forall x \in B_1(0)$，$\Delta u(x) \geqslant 0$，则$\sup\limits_{B_1} u \leqslant \sup\limits_{\partial B_1} u$. 若$u \in C^2(U)$是下（上）调和函数，则$\forall B_r(x) \subset U$，有：

(1)$u(x) \geqslant (\leqslant) \frac{1}{|\partial B_r(x)|}\int_{\partial B_r(x)} u(y)\mathrm{d}S_y$;

(2)$u(x) \geqslant (\leqslant) \frac{1}{|\partial B_r(x)|}\int_{B_r(x)} u(y)\mathrm{d}y$.

【证明】只需证(1)下调和的情况. $0 \geqslant \int_{B_\rho(x)} \Delta u(y)\mathrm{d}y = \rho^{n-1}\int_{\partial B_1(0)} \frac{\partial}{\partial\rho}u(x+\rho\omega)\mathrm{d}S_\omega$.

因此，对ρ在$\dfrac{\partial}{\partial\rho}\displaystyle\int_{\partial B_1(0)} u(x+\rho\omega)\mathrm{d}S_\omega \leqslant 0$两边从0到$r$积分即可. $\square$

定理4.4.6 设$u\in C^2(B_1)\cap C(\overline{B}_1)$是$B_1$上的上调和函数，则$\sup\limits_{B_1} u\leqslant \sup\limits_{\partial B_1} u$.

【证明】$\forall\varepsilon>0$, 考虑$u_\varepsilon(x)=u(x)+\varepsilon|x|^2\ (x\in B_1(0))$， 则$\Delta u_\varepsilon=\Delta u+2n\varepsilon\geqslant 0\ldots(\bigstar)$.

$\sup\limits_{B_1} u_\varepsilon\leqslant\sup\limits_{\partial B_1} u_\varepsilon$，否则，令$x_0\in B_1$，使得$u_\varepsilon(x_0)=\max\limits_{\overline{B_1}} u_\varepsilon$，则$\Delta u_\varepsilon(x_0)\leqslant 0$与$(\bigstar)$矛盾！

注意到：$\sup\limits_{B_1} u\leqslant\sup\limits_{B_1} u_\varepsilon\leqslant\sup\limits_{\partial B_1} u_\varepsilon\leqslant\sup\limits_{\partial B_1} u+\varepsilon$， 令$\varepsilon\to 0^+$，有：$\sup\limits_{B_1} u\leqslant\sup\limits_{\partial B_1} u$. $\square$

【注】这里是弱极大值原理，仅仅是在边界达到，却并非只能在边界上取到. 事实上，它适用于任意有界区域.

我们知道Young不等式具有如下形式：

(1)对$\forall\varepsilon>0$，$a,b>0$，$ab\leqslant\varepsilon a^2+\dfrac{b^2}{4\varepsilon}$；(2)$\forall\varepsilon>0$，$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$，$ab\leqslant\dfrac{\varepsilon a^p}{p}+\dfrac{\varepsilon^{-\frac{q}{p}}b^q}{q}$.

利用上述Young不等式的形式，我们得到如下性质：

定理4.4.7 若u是B_1上的调和函数，则$\sup\limits_{B_{\frac12}}|\mathrm{D}u|\leqslant c\sup\limits_{\partial B_1}|u|$.

【证明】$\Delta(|\mathrm{D}u|^2)=\displaystyle\sum_{i,j=1}^n\mathrm{D}_i(2\mathrm{D}_ju\mathrm{D}_{ij}u)=2\sum_{i,j=1}^n(\mathrm{D}_{ij}u)^2+2\sum_{j=1}^n\mathrm{D}_ju\mathrm{D}_j(\Delta u)=2\sum_{i,j=1}^n(\mathrm{D}_{ij}u)^2$.

下面取$\eta\in C_0^2(B_1)$，使得$\forall x\in B_{\frac12}$，$\eta\equiv 1$，则

$$\begin{aligned}&\Delta(\eta^2|\mathrm{D}u|^2)=\Delta(\eta^2)|\mathrm{D}u|^2+2\mathrm{D}(\eta^2)\mathrm{D}(|\mathrm{D}u|^2)+\eta^2\Delta(|\mathrm{D}u|^2)\\=&2\eta\Delta\eta|\mathrm{D}u|^2+2|\mathrm{D}\eta|^2|\mathrm{D}u|^2+8\eta\sum_{i,j=1}^n\mathrm{D}_i\eta\mathrm{D}_ju\mathrm{D}_{ij}u+2\eta^2\sum_{i,j=1}^n(\mathrm{D}_{ij}u)^2\ldots(\bigstar).\end{aligned}$$

利用Young不等式：

$$\left|8\eta\sum_{i,j=1}^n\mathrm{D}_i\eta\mathrm{D}_ju\mathrm{D}_{ij}u\right|\leqslant 8\sum_{i,j=1}^n\left(\frac{1}{4\varepsilon}|\mathrm{D}_i\eta|^2|\mathrm{D}_ju|^2+\varepsilon\eta^2|\mathrm{D}_{ij}u|^2\right)=\frac{2}{\varepsilon}|\mathrm{D}\eta|^2|\mathrm{D}u|^2+8\varepsilon\eta^2\sum_{i,j=1}^n|\mathrm{D}_{ij}u|^2.$$

取$\varepsilon=\dfrac14$,有：$\left|8\eta\displaystyle\sum_{i,j=1}^n\mathrm{D}_i\eta\mathrm{D}_ju\mathrm{D}_{ij}u\right|\leqslant 8|\mathrm{D}\eta|^2|\mathrm{D}u|^2+2\eta^2\displaystyle\sum_{i,j=1}^n|\mathrm{D}_{ij}u|^2$. 代入$(\bigstar)$：

$$\Delta(\eta^2|\mathrm{D}u|^2)\geqslant 2\eta\Delta\eta|\mathrm{D}u|^2-8|\mathrm{D}\eta|^2|\mathrm{D}u|^2=(2\eta\Delta\eta-6|\mathrm{D}\eta|^2)|\mathrm{D}u|^2=-c(\eta)|\mathrm{D}u|^2$$

其中$c(\eta)>0$只与n有关. 又$\Delta(u^2)=2u\Delta u+2|\mathrm{D}u|^2=2|\mathrm{D}u|^2$，故对足够大的$\alpha>0$，有：

$$\Delta(\eta^2|\mathrm{D}u|^2+\alpha n^2)\geqslant(2\alpha-c)|\mathrm{D}u|^2\geqslant 0.$$

由定理4.4.6：$\sup\limits_{B_1}(\eta^2\left|\mathrm{D}u\right|^2+\alpha u^2)\leqslant\sup\limits_{\partial B_1}(\eta^2\left|\mathrm{D}u\right|^2+\alpha u^2)$，故

$$\sup_{B_{\frac{1}{2}}}\left|\mathrm{D}u\right|^2=\sup_{B_1}(\eta^2\left|\mathrm{D}u\right|^2)\leqslant\alpha\sup_{\partial B_1}u^2\Rightarrow\sup_{B_{\frac{1}{2}}}\left|\mathrm{D}u\right|\leqslant\sqrt{\alpha}\sup_{\partial B_1}\left|u\right|.\quad\square$$

定理4.4.8 设$u\geqslant 0$是B_1上的调和函数，则$\sup\limits_{B_{\frac{1}{2}}}\left|\mathrm{D}\log u\right|\leqslant c$，其中$c=c(n)$.

【证明】不妨设$u>0$ $(\forall x\in B_1)$，令$v=\log u$，则$\Delta v=\mathrm{D}(\dfrac{\mathrm{D}u}{u})=\dfrac{\Delta u}{u}-\dfrac{\left|\mathrm{D}u\right|^2}{u^2}=-\left|\mathrm{D}v\right|^2$.

令$w=\left|\mathrm{D}v\right|^2$，则$\Delta w=2\sum\limits_{i,j=1}^{n}(\mathrm{D}_{ij}v)^2+2\sum\limits_{i=1}^{n}\mathrm{D}_iv\mathrm{D}_i(\Delta v)\Rightarrow\Delta w+2\sum\limits_{i=1}^{n}\mathrm{D}_iv\mathrm{D}_i(w)=2\sum\limits_{i,j=1}^{n}(\mathrm{D}_{ij}v)^2$.

取一个非负截断函数$\varphi\in C_0^2(B_1)$，使得$\dfrac{\left|\mathrm{D}\varphi\right|^2}{\varphi}$在$B_1$上有界. 则

$$\Delta(\varphi w)+2\sum_{i=1}^{n}\mathrm{D}_iv\mathrm{D}_i(\varphi w)=(\Delta\varphi)w+2\mathrm{D}\varphi\cdot\mathrm{D}w+\varphi(\Delta w+2\sum_{i=1}^{n}\mathrm{D}_iv\mathrm{D}_iw)+2w\sum_{i=1}^{n}\mathrm{D}_iv\mathrm{D}_i\varphi$$

$$=2\varphi\sum_{i,j=1}^{n}(\mathrm{D}_{ij}v)^2+4\sum_{i,j=1}^{n}\mathrm{D}_i\varphi\mathrm{D}_jv\mathrm{D}_{ij}v+2w\sum_{i=1}^{n}\mathrm{D}_iv\mathrm{D}_i\varphi+(\Delta\varphi)w\ldots(\bigstar)，其中$$

$$\left|4\sum_{i,j=1}^{n}\mathrm{D}_i\varphi\mathrm{D}_jv\mathrm{D}_{ij}v\right|=\left|4\sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\mathrm{D}_i\varphi}{\sqrt{\varphi}}\mathrm{D}_jv\right)(\sqrt{\varphi}\mathrm{D}_{ij}v)\right|$$
$$\leqslant 4\sum_{i,j=1}^{n}(\frac{(\mathrm{D}_i\varphi)^2}{4\varepsilon\varphi}(\mathrm{D}_jv)^2+\varepsilon\varphi(\mathrm{D}_{ij}v)^2)\xlongequal{\varepsilon=\frac{1}{4}}4\sum_{i,j=1}^{n}\frac{(\mathrm{D}_i\varphi)^2}{\varphi}(\mathrm{D}_jv)^2+\varphi(\mathrm{D}_{ij}v)^2\ldots(\bigstar^1).$$

同时，$\left|2w\sum\limits_{i=1}^{n}\mathrm{D}_iv\mathrm{D}_i\varphi\right|\leqslant 2w|\mathrm{D}v||\mathrm{D}\varphi|=2|\mathrm{D}v|^3|\mathrm{D}\varphi|\ldots(\bigstar^2)$.

把$(\bigstar^1)$和$(\bigstar^2)$代入$(\bigstar)$：$\Delta(\varphi w)+2\sum\limits_{i=1}^{2}n\mathrm{D}_iv\mathrm{D}_i(\varphi w)\geqslant\ \varphi\sum\limits_{i,j=1}^{n}(\mathrm{D}_{ij}v)^2-\dfrac{4|\mathrm{D}\varphi|^2}{\varphi}|\mathrm{D}v|^2$

$$-2|\mathrm{D}\varphi||\mathrm{D}v|^3-|\Delta\varphi|w=\ \varphi\sum_{i,j=1}^{n}(\mathrm{D}_{ij}v)^2-2|\mathrm{D}\varphi||\mathrm{D}v|^3-\left(|\Delta\varphi|+\frac{4|\mathrm{D}\varphi|^2}{\varphi}\right)|\mathrm{D}v|^2.$$

又因为$\sum\limits_{i,j=1}^{n}(\mathrm{D}_{ij}v)^2\geqslant\sum\limits_{i=1}^{n}(\mathrm{D}_{ii}v)^2\geqslant\dfrac{1}{n}(\Delta v)^2=\dfrac{w^2}{n}$，把(4.6)代入，得：

$$\Delta(\varphi w)+2\sum_{i=1}^{n}\mathrm{D}_iv\mathrm{D}_i(\varphi w)\geqslant\frac{\varphi}{n}w^2-2|\mathrm{D}\varphi|w^{\frac{3}{2}}-\left(|\Delta\varphi|+\frac{4|\mathrm{D}\varphi|^2}{\varphi}\right)w.$$

取$\varphi = \eta^4 \in C_0^2(B_1)$, 使得$\eta \equiv 1$ $(x \in B_{\frac{1}{2}})$，则

$$\Delta(\eta^4 w) + 2\sum_{i=1}^{n} \mathrm{D}_i v \mathrm{D}_i(\eta^4 w) \geqslant \frac{1}{n}\eta^4 w^2 - 8|\mathrm{D}\eta|(\eta^2 w)^{\frac{3}{2}} - 4(\eta|\Delta\eta| + 19\eta^2|\mathrm{D}\eta|^2)(\eta^2 w).$$

由Young不等式：$8|\mathrm{D}\eta|(\eta^2 w)^{\frac{3}{2}} \leqslant \dfrac{8\varepsilon(\eta^2 w)^2}{\frac{4}{3}} + \dfrac{8\varepsilon^{-3}|\mathrm{D}\eta|^4}{4} \xlongequal{\varepsilon=\frac{1}{24n}} \dfrac{1}{4n}\eta^4 w^2 + C(n,\eta).$

且$4(\eta|\Delta\eta| + 19\eta^2|\mathrm{D}\eta|^2)(\eta^2 w) \leqslant 4\varepsilon(\eta^2 w)^2 + \dfrac{1}{\varepsilon}(\eta|\mathrm{D}\eta| + 19\eta^2|\mathrm{D}\eta|^2) \xlongequal{\varepsilon=\frac{1}{16n}} \dfrac{1}{4n}\eta^4 w^2 + C(n,\eta).$

设$\eta^4 w$在$x_0 \in B_1$处取最大值，则$\Delta(\eta^4 w)(x_0) \leqslant 0$且$\mathrm{D}(\eta w)(x_0) = 0$ $\therefore \Delta(\eta^4 w^2)(x_0) \leqslant C(n,\eta)$.

若$w(x_0) \geqslant 1$，则$\eta^4 w(x_0) \leqslant \eta^4 w^2(x_0) \leqslant C(n,\eta)$.

否则，$w(x_0) < 1$，$\eta^4 w(x_0) < \eta^4(x_0) \leqslant C(n,\eta) \Rightarrow \eta^4 w \leqslant C(n,\eta)$ $(x \in B_1)$.

$\therefore w(x) \leqslant C(n,\eta)(\forall x \in B_{\frac{1}{2}})$，此即$\sup\limits_{B_{\frac{1}{2}}(0)} |\mathrm{D}\log u| \leqslant C(n)$. □

<u>**定理4.4.9**</u> 设$u > 0$是$B_1(0)$上的调和函数，则$\sup\limits_{B_{\frac{1}{2}}(0)} |\mathrm{D}\log u| \leqslant n$

【证明】利用梯度估计：$|\mathrm{D}u(x)| \leqslant nu(x)$ $(\forall x \in B_{\frac{1}{2}})$ $\therefore |\mathrm{D}\log u(x)| \leqslant n$ $(\forall x \in B_{\frac{1}{2}})$. □

<u>**推论4.4.10**</u> 设$B_1(0)$上调和函数$u \geqslant 0$，则$u(x_1) \leqslant C(n)u(x_2)$ $(\forall x_1, x_2 \in B_{\frac{1}{2}}(0))$.

假设$u > 0$ $(x \in B_1)$. $\forall x_1, x_2 \in B_{\frac{1}{2}}$，由定理2.12：

$$\log\frac{u(x_1)}{u(x_2)} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\log u(tx_1 + (1-t)x_2))\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} |\mathrm{D}(\log u(tx_1 + (1-t)x_2))||x_1 - x_2|\mathrm{d}t$$

$\leqslant C(n)|x_1 - x_2| \leqslant C(n)$，因此$u(x_1) \leqslant \mathrm{e}^{C(n)}u(x_2)$. □

【注】如果是B_R的情况，以上讨论做一个伸缩即可.

第5讲　泛函分析与L^p空间

§5.1　Banach空间和Hilbert空间

<u>**定义5.1.1**</u> 设$\mathcal{X}$是线性空间，$\|\cdot\|$是一个范数，即满足：

(1)(正定性)$\forall x\in\mathcal{X}$，$\|x\|\geqslant 0$，当且仅当$x=\theta$取等；

(2)(齐次性)$\forall\alpha\in\mathbb{C}$，$x\in\mathcal{X}$，$\|\alpha x\|=|\alpha|\cdot\|x\|$；

(3)(三角不等式)$\forall x,y\in\mathcal{X}$，$\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$.

如果$\|\cdot\|$是完备的(即Cauchy列收敛)，则称$(\mathcal{X},\|\cdot\|)$是一个Banach空间.

<u>**定理5.1.2**</u> (Bananch不动点定理)设$(\mathcal{X},\|\cdot\|)$是Banach空间，$T:\mathcal{X}\to\mathcal{X}$是压缩映射，即存在$0<k<1$，使得对任意$x,y\in\mathcal{X}$，$\|Tx-Ty\|\leqslant k\|x-y\|$，则$T$在$\mathcal{X}$上存在唯一不动点$x_0$，即$Tx_0=x_0$.

<u>**定义5.1.3**</u> 称$A\subset\mathcal{X}$是列紧集，如果A中任意点列都有收敛子列. 如果这个收敛子列能够保证收敛到A中，则称A是自列紧集. 如果任意A的开覆盖总有有限子覆盖，称A是紧集.

<u>**定理5.1.4**</u> Banach空间中的紧集当且仅当是自列紧集.

<u>**定理5.1.5**</u> (Arzela-Ascoli引理)$\mathcal{X}$是紧的Banach空间，$\mathcal{X}$上的函数列$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$一致收敛当且仅当：

(1)(一致有界)$\exists M>0$，使得$\forall x\in\mathcal{X}$，$n\in\mathbb{N}^*$，$|f_n(x)|\leqslant M$；

(2)(等度连续)$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使得$|f_n(x)-f_n(y)|<\varepsilon\ (\forall n\in\mathbb{N}^*,\ x,y\in\mathcal{X},\ \|x-y\|<\delta)$.

<u>**定理5.1.6**</u> 有限维线性空间$\mathcal{X}$上的上的范数必定等价，即若$\|\cdot\|_1$、$\|\cdot\|_2$都是$\mathcal{X}$上的范数，则必定存在正常数c_1,c_2，使得$c_1\|x\|_1\leqslant\|x\|_2\leqslant c_2\|x\|_1\ (\forall x\in\mathcal{X})$.

<u>**定义5.1.7**</u> 设$\mathcal{H}$是线性空间，具有一个双线性函数$(\cdot,\cdot)$，满足：

(1)(正定性) $\forall x\in\mathcal{H}$，$(x,x)\geqslant 0$，当且仅当$x=\theta$取等；

(2)(共轭双线性)$\forall x,y,z\in\mathcal{H}$，$\alpha,\beta\in\mathbb{C}$，$(\alpha x+\beta y,z)=\alpha(x,z)+\beta(y,z)$；

(3)(共轭对称性)$\forall x,y\in\mathcal{H}$，$(x,y)=\overline{(y,x)}$.

我们称$(\cdot,\cdot)$为一个内积，它能诱导范数：$\|\cdot\|=\sqrt{(\cdot,\cdot)}$，如果这个范数完备，称$(\mathcal{H},(\cdot,\cdot))$为一个Hilbert空间.

<u>**定义5.1.8**</u> 称$S=\{e_\alpha:\alpha\in A\}$是Hilbert空间$\mathcal{H}$的一个正交规范集，如果对任意的$\alpha,\beta\in A$，$e_\alpha\perp e_\beta$，且$\forall\alpha\in A$，$\|e_\alpha\|=1$. 如果$S^\perp:=\{x\in\mathcal{H}:x\perp y\ (\forall y\in S)\}=\{\theta\}$，称$S$为完备的.

定理5.1.9 (Bessel不等式)设$S = \{e_\alpha : \alpha \in A\}$是Hilbert空间$\mathcal{H}$的一个正交规范集，则对任意$x \in \mathcal{H}$，$\sum_{\alpha\in A} |(x, e_\alpha)|^2 \leqslant \|x\|^2$.

定理5.1.10 如果$\mathcal{H}$上的正交规范集$S = \{e_\alpha : \alpha \in A\}$是一个基(或封闭的)，i.e. $\forall x \in \mathcal{H}$，$x = \sum_{\alpha\in A} (x, e_\alpha)e_\alpha$. 它与下列条件都等价：

(1)S是完备的；(2)满足Parseval等式，即Bessel不等式取等.

定理5.1.11 (正交分解)设M是Hilbert空间$\mathcal{H}$上的一个闭线性子空间. 那么$\forall x \in \mathcal{H}$，存在唯一正交分解$x = y + z$，其中$y \in M$，$z \in M^\perp$.

参考文献

[1] 张恭庆，林源渠. 泛函分析讲义(上册). 北京大学出版社，1987.3

[2] Lawrence C. Evans. Partial Differential Equations(Second Edition). American Mathematical Society Providence, Rhode Island, 2010.1

[3] 常庚哲，史济怀. 数学分析教程. 中国科学技术大学出版社，2013.1

[4] Elias M.Stein, Rami Shakarchi. Real Analysis. Princeton University Press, 2013.1

[5] 王明新. 索伯列夫空间. 高等教育出版社，2013.5

[6] Lawrence C. Evans, Ronald F. Gariepy. Measure Theory and Fine Properties of Functions(Revised Edition). CRC Press, 2015.3

[7] 周民强. 实变函数论(第3版). 北京大学出版社，2016.10

[8] Han Qing, Lin Fanghua. Elliptic Equation. (未出版)